

**ECOLE POLYTECHNIQUE - ESPCI
ECOLE NORMALES SUPERIEURES**

CONCOURS D'ADMISSION 2026

**MERCREDI 15 AVRIL 2026
08h00 - 12h00
FILIERE MP - Epreuve n° 5
PHYSIQUE**

***Durée : 4 heures
L'utilisation des calculatrices n'est pas
autorisée pour cette épreuve***

Etude des ondes mécaniques dans une plaque élastique

Nous allons étudier la propagation d'ondes mécaniques dans un milieu solide élastique d'épaisseur finie. Nous allons ainsi considérer une plaque solide homogène, d'épaisseur e , de largeur l et de longueur L , initialement au repos dans le plan (Oxy) . En préambule, nous étudierons une onde longitudinale de compression, puis le cœur du problème consistera en l'étude d'un mode de déformation transverse particulier. Cette onde dite de flexion, se propageant dans la direction (Ox) , c'est-à-dire que nous supposons une invariance par translation selon l'axe (Oy) sur toute sa largeur l , est représentée sur la figure 1. Nous analyserons ensuite plusieurs applications avant d'étudier une méthode de mesure optique de ces ondes. Ces différentes parties sont pour certaines indépendantes.

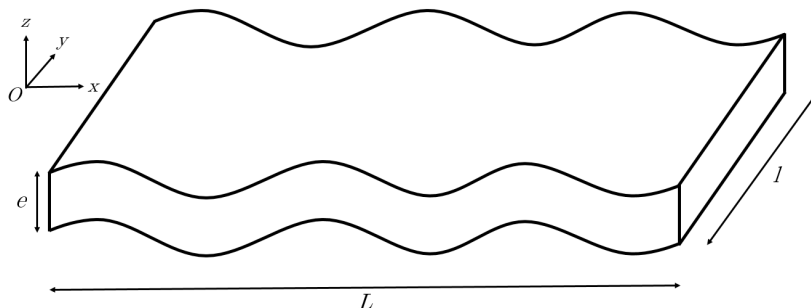


FIGURE 1 – Plaque de solide élastique soumise à des déformations en flexion.

La rigidité de la plaque est suffisamment grande pour que la gravité soit négligée. Dans tout le problème, l'amplitude des déformations sera faible par rapport à toutes les autres longueurs.

I. Préambule : onde de compression unidimensionnelle

Etudions en préambule la propagation d'une onde de compression longitudinale dans une série de molécules identiques (de masse m) confinées sur l'axe (Ox) et reliées par des ressorts identiques (de raideur κ et de longueur à vide a), voir figure 2. Au repos, les masses sont régulièrement espacées (avec un pas a).

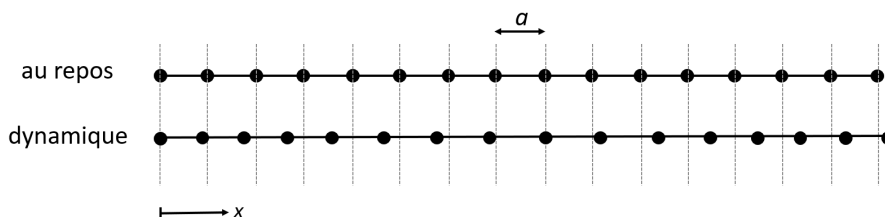


FIGURE 2 – Chaîne de molécules identiques. Les traits continus entre les molécules représentent des ressorts de raideur κ et de longueur à vide a . Le schéma du haut représente la chaîne au repos, alors que le schéma du bas représente les molécules déplacées lors du passage d'une onde de compression.

1. En notant δ_n l'élongation du $n^{\text{ième}}$ ressort (définie comme la différence entre sa longueur et sa longueur à vide), rappeler l'expression de l'énergie potentielle élastique qu'il emmagasine.

Etudions un cas dynamique, dans lequel le mouvement des molécules est décrit par une onde plane progressive harmonique (OPPH). Au passage de l'onde, les molécules s'écartent de leur position au repos (voir figure 2), et l'on notera u cet écart.

En supposant que la maille du réseau (a) est très petite devant la longueur d'onde de l'OPPH, il apparaît pertinent de décrire le système non pas comme une assemblée de molécules mais comme un milieu continu. Ainsi, le déplacement u est donné par une fonction continue :

$$u(x, t) = U \sin(kx - \omega t)$$

où U est l'amplitude, k le nombre d'onde et ω la pulsation de l'OPPH.

- Donner l'expression, sous forme d'une somme discrète de l'énergie potentielle élastique emmagasinée sur une longueur d'onde, notée E_p^λ .
- Si la fonction $u(x, t)$ était constante selon x , cela signifierait que les molécules ont avancé en bloc, et donc qu'aucun des ressorts n'aurait été comprimé. Ainsi, dans le cas général, l'élongation de chaque ressort est localement reliée non pas à la valeur de u mais à sa variation spatiale :

$$\frac{\delta(x, t)}{a} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$$

Justifier alors que l'énergie potentielle élastique définie à la question précédente peut désormais s'écrire :

$$E_p^\lambda = \frac{1}{2} \kappa a \int_0^\lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx$$

- Donner, sous la forme d'une intégrale, l'énergie cinétique E_c^λ sur une longueur correspondant à une longueur d'onde.
- On admettra qu'au passage de l'onde, l'énergie mécanique est également répartie entre ses composantes cinétique E_c^λ et potentielle E_p^λ . En déduire la relation suivante :

$$\omega^2 = k^2 c^2$$

où c est une constante dont on donnera l'expression et la signification physique.

- Cette relation de dispersion (établie par une approche énergétique) peut permettre de remonter à l'équation d'onde qui régit les déformations du milieu. En effet, la dérivée temporelle d'une OPPH fait apparaître un facteur ω (ou $j\omega$ en notation complexe).

Proposer alors une équation de propagation linéaire, sur une déformation $u(x, t)$ quelconque, qui corresponde à la relation de dispersion. Commenter cette équation d'onde.

II. Energie élastique pour une plaque en compression homogène

Nous allons désormais modéliser de façon simple le solide élastique par un ensemble de molécules identiques, de masse m , dans un réseau cubique de maille a , reliées par des ressorts de raideur κ et de longueur à vide a (voir figure 3). On supposera que les dimensions de la plaque au repos (e , l et L) sont très grandes devant la maille a .

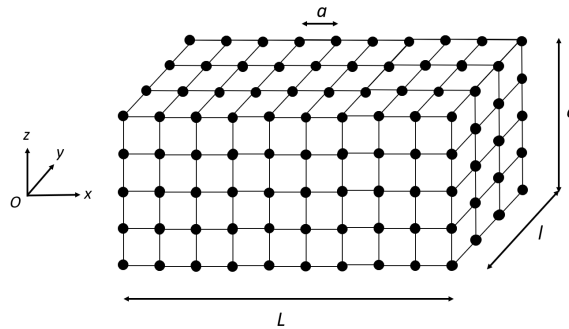


FIGURE 3 – Schéma du solide vu comme un réseau cubique de maille a de molécules identiques. Les traits entre les molécules représentent des ressorts de raideur κ et de longueur à vide a .

Lorsque l'on applique une force de compression dans la direction (Ox) à chaque extrémité, la plaque se contracte d'une longueur ΔL , sans changer de dimension selon les directions transverses (Oy) et (Oz) . Dans ce mode de compression, seuls les ressorts dirigés selon l'axe (Ox) peuvent se comprimer et s'étendre.

7. Dans le régime statique ici considéré, la compression est homogène, c'est-à-dire que tous les ressorts individuels (dans la direction (Ox)) se compriment d'une même longueur δ .

Tracer l'allure du déplacement $u(x)$.

8. Exprimer en fonction des dimensions de la plaque (e , l et L) le nombre de ressorts individuels comprimés.
9. Montrer alors que l'énergie potentielle élastique de la plaque comprimée s'écrit :

$$E_p^L = \frac{1}{2} K \frac{el}{L} \Delta L^2$$

où $K = \kappa/a$ est la raideur par unité de longueur.

III. Flexion

Etudions désormais une tranche (longueur L , largeur l et épaisseur e) qui sous l'effet de contraintes mécaniques de flexion (non détaillées ici) acquiert une courbure (figure 4). On admettra que la forme adoptée par la tranche est un arc de cercle, d'angle θ et de centre C , invariant selon la direction (Oy) . La longueur moyenne de la tranche reste alors inchangée mais sa face extérieure s'étire alors que sa face intérieure se contracte. L'élément dont la longueur ne varie pas est appelé fibre neutre et se situe au milieu de la plaque, et sa distance au centre C est notée R_C . On admettra que dans ces conditions, les résultats établis en partie II restent valables.

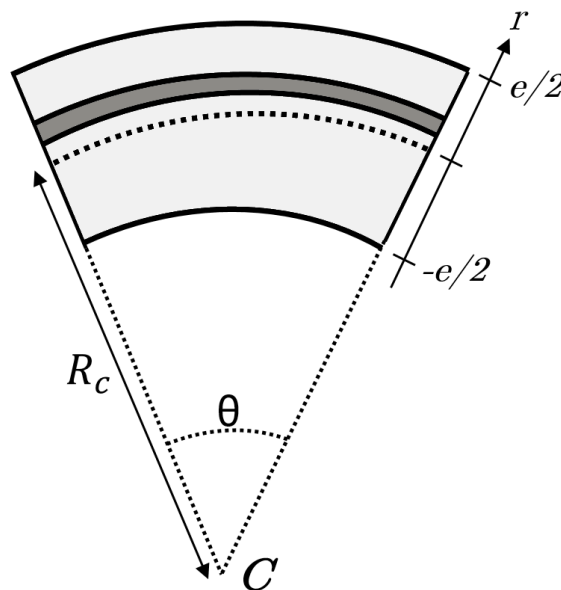


FIGURE 4 – Élément de plaque en flexion (vue de côté). La fibre neutre, au milieu de la tranche, est représentée en pointillés. Le matériau est représenté en gris et la tranche infinitésimale d'épaisseur dr en gris foncé.

10. Quel est le sens physique de la grandeur R_C ?
Donner une relation géométrique entre R_C , θ et L .
11. On notera r la distance (algébrique) qui sépare un point quelconque au sein de la plaque de la fibre neutre (voir figure 4). Par convention, r sera positive dans la zone en extension, et négative

dans la zone en compression. Considérons le système d'épaisseur infinitésimale dr compris entre r et $r + dr$ (en gris foncé sur la figure 4).

Exprimer l'élongation de cette fibre en fonction de r , L et R_C .

12. En utilisant le résultat de la question 9, exprimer l'énergie potentielle élémentaire emmagasinée par cet élément.
13. En déduire que l'énergie potentielle élastique de la tranche sur toute son épaisseur e s'écrit :

$$E_p^L = AK \frac{Lle^3}{R_c^2}$$

où A est un préfacteur numérique dont on donnera l'expression. Dans la suite, si nécessaire, on pourra utiliser ce résultat sans expliciter la valeur de la constante A .

IV. Relation de dispersion des ondes de flexion

Nous allons maintenant considérer une déformation plus complexe de la plaque sous forme d'une onde plane progressive harmonique de pulsation ω et de nombre d'onde k , comme représenté sur la figure 1. La fibre neutre est à nouveau située au milieu de la plaque (selon son épaisseur e) et sa position $Z(x, t)$ s'écrit alors :

$$Z(x, t) = a_Z \sin(kx - \omega t)$$

14. On définit l'inclinaison locale de la plaque par rapport à la position au repos horizontale, notée $\alpha(x, t)$. Pour rappel, on se place dans le régime des faibles déformations. Donner alors la relation liant $\alpha(x, t)$ à $Z(x, t)$.

Si la plaque a désormais une forme sinusoïdale, il reste toujours possible de l'assimiler localement à un arc de cercle (dont le rayon varie le long de la plaque), et ainsi d'utiliser les résultats de la partie III. La relation liant les grandeurs R_c , L et θ devient alors localement :

$$ds = R_c d\alpha$$

où ds est une longueur infinitésimale le long de la fibre neutre, et $d\alpha$ la variation d'inclinaison associée.

Pour les faibles déformations étudiées ici, on donne :

$$\frac{1}{R_c} = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}$$

15. Calculer alors l'énergie potentielle élastique intégrée sur une longueur d'onde, notée E_p^λ .
16. Donner l'expression de l'énergie cinétique totale sur une longueur d'onde, notée E_c^λ , en fonction des paramètres de l'OPPH.
17. On admettra que lors de la propagation de l'onde, les moyennes temporelles des énergies potentielles élastique et cinétique sont égales. Etablir alors la relation de dispersion :

$$12\omega^2 = e^2 c^2 k^4$$

18. Donner l'expression de c en fonction de la raideur K et de la masse volumique du matériau ρ . Calculer sa valeur numérique et commenter.
On prendra $K = 70$ GPa et $\rho = 2500$ kg/m³, valeurs typiques pour le verre.
19. Montrer que la vitesse de groupe vaut le double de la vitesse de phase.
Comment ces vitesses varient-elles avec la fréquence de l'OPPH ?
Quelles conséquences cela a-t-il sur la propagation d'un paquet d'ondes ?

20. En reprenant la méthode de la question 6, proposer une équation de propagation linéaire pour l'équation d'onde. Commenter chacun des termes de cette équation.

V. Applications

Modes propres d'un anneau (flûte à champagne)

Une flûte à champagne peut émettre un son lorsqu'un doigt mouillé sollicite ses modes propres. Le verre sera assimilé à un cylindre vertical de hauteur $h = 10$ cm, d'épaisseur $e = 0,5$ mm, et de rayon $R_0 = 2$ cm. On supposera que les déformations sont uniquement radiales, c'est-à-dire qu'elles sont uniformes le long de la direction verticale.

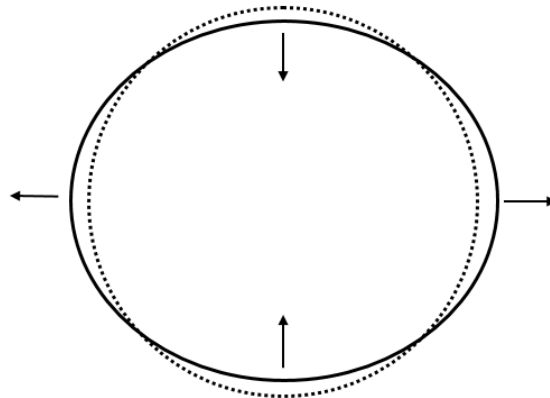


FIGURE 5 – Déformations transverses d'un cylindre (vue du dessus) représentant une flûte à champagne. La position au repos est représentée en pointillés. Dans ce mode, la flûte oscille en opposition de phase selon deux directions perpendiculaires.

Dans ce système les modes propres peuvent être vus comme la superposition de deux ondes de mêmes amplitudes se propageant dans des directions opposées autour de la flûte (où s est la position le long de l'anneau) :

$$Z(s, t) = a_Z \sin(ks - \omega t) + a_Z \sin(ks + \omega t)$$

21. A cause des conditions aux limites (ici périodiques), le nombre d'onde correspondant à un mode propre est quantifié. Citer un système d'un autre domaine de la physique dans lequel une telle condition existe.
22. Dans le cas de la flûte, exprimer cette condition de quantification sur le nombre d'onde k .
23. La figure 5 correspond au second mode propre. Représenter sur un schéma similaire le premier mode propre et décrire le mouvement du verre correspondant.
24. Lorsque l'on cherche à faire chanter une flûte avec le doigt mouillé, le second mode propre est naturellement sélectionné. Donner l'expression de la fréquence (temporelle) de ce mode.
25. Faire l'application numérique et discuter du résultat obtenu (pour rappel : $K = 70$ GPa, $\rho = 2500$ kg/m³).

Séismes

Les séismes sont des oscillations de la croûte terrestre, vue ici comme une plaque déformable d'épaisseur $e = 30$ km, de raideur $K = 100$ GPa et de masse volumique $\rho = 2800$ kg/m³.

26. Lors d'un séisme, les ondes de compression longitudinales (ondes P) se propagent à une vitesse de 6 km/s. Cette valeur est-elle cohérente avec les résultats précédents ?
27. On lit souvent dans la littérature que les ondes transverses S (que l'on assimilera abusivement ici aux ondes de flexion étudiées) se propagent à une vitesse de 4 km/s. Pour que cette affirmation ait un sens, s'agit-il de la vitesse de phase ou de groupe ? Justifier.

28. D'après ces données, calculer la longueur d'onde des ondes S.

Lac gelé

Les déformations transverses d'une plaque mince peuvent également modéliser le comportement d'un lac dont la surface est gelée. Lorsque l'on jette une pierre sur la plaque de glace, un son étrange peut être entendu. L'impact de la pierre crée localement un train d'onde sur une large bande de fréquences s'étalant de quelques dizaines de Hz à quelques kHz. Cette onde de flexion transverse se propage sur le lac gelé et les vibrations transverses de la glace émettent alors une onde acoustique audible.

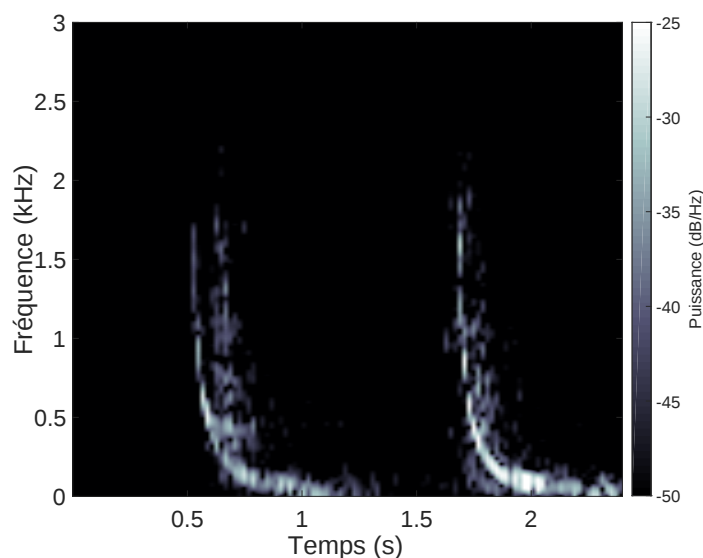


FIGURE 6 – Diagramme temps-fréquence du son créé par deux impacts sur une couche de glace. L'amplitude est indiquée en décibel/Hz.

29. La figure 6 montre le diagramme temps-fréquence d'un enregistrement acoustique à une certaine distance de l'impact. Deux pierres ont été lancées. L'origine des temps est arbitraire. Commentez cette figure.
30. Expliquer comment, sur le principe, ces données pourraient permettre de calculer l'épaisseur de la couche de glace.
31. Expliquer pourquoi le son perçu sera différent pour des observateurs situés à une distance de 50 m ou 500 m de l'impact.

VI. Détection des ondes de flexion : vibrométrie laser

Il existe plusieurs instruments permettant de mesurer les vibrations d'une plaque. La vibrométrie laser propose d'exploiter les interférences entre un rayon laser source et sa réflexion sur une plaque vibrante. Cette méthode optique sans contact permet ainsi de ne pas perturber le mouvement de plaques légères. C'est par exemple le cas pour l'étude d'un violon, dont la table d'harmonie est une fine plaque de bois soumise à des ondes d'amplitude $a_z = 100 \mu\text{m}$ à une fréquence de 1 kHz.

Le principe du vibromètre laser est décrit sur la figure 7 a. L'appareil envoie un rayon laser de longueur d'onde $\lambda_l = 315 \text{ nm}$ (et de fréquence temporelle f_l) sur la plaque qui le rétrodiffuse. Une partie de ce signal réfléchi est capté par l'appareil, et crée à l'aide d'un montage optique interne des interférences. L'intensité lumineuse est alors convertie en tension à l'aide d'une photodiode dont le temps de réaction vaut 5 ns.

Le montage optique est décrit sur la figure 7b. La source laser (O) émet un rayon qui est divisé par une première lame semi-réfléchissante, ou séparatrice (S_0). D'une part, le rayon de référence

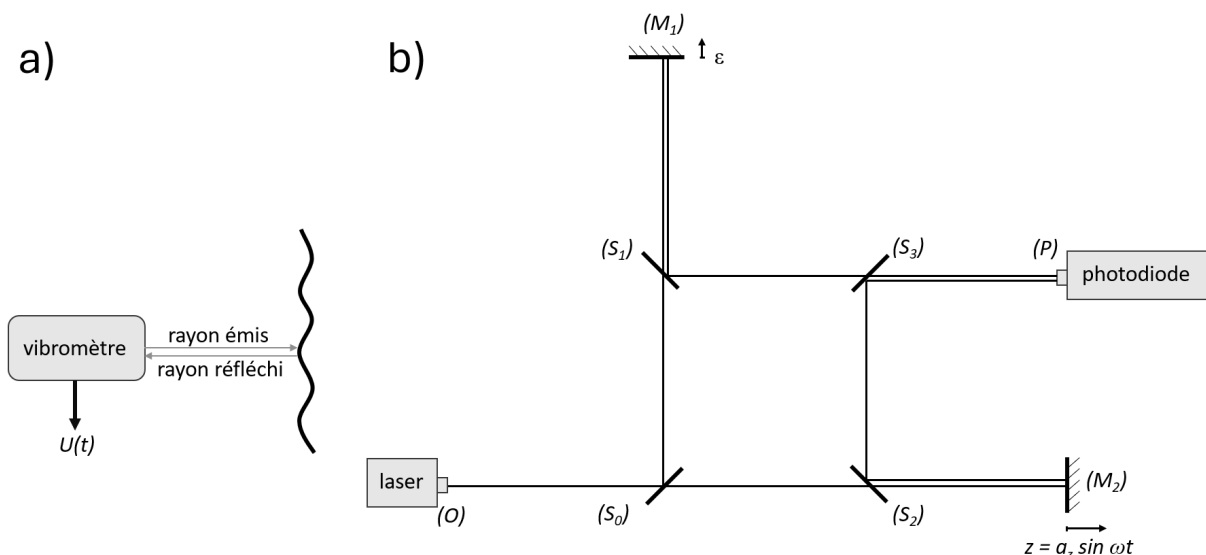


FIGURE 7 – Vibrométrie laser. a) schéma de principe. b) montage optique équivalent.

réfléchi sur (S_0) passe à travers la séparatrice (S_1) , puis est réfléchi par le miroir (M_1) et ensuite réfléchi par (S_1) puis transmis vers la photodiode (P) à travers (S_3) . D'autre part, le rayon sonde est transmis à travers (S_0) et (S_2) , puis réfléchi sur la plaque vibrante ici assimilée à un miroir plan (M_2) , perpendiculaire au rayon, et dont la position oscille dans le temps : $z = a_z \sin(\omega t)$. Ce rayon réfléchi subit ensuite une réflexion sur (S_2) , puis sur (S_3) pour être dirigé vers la photodiode.

Au sein du vibromètre, la distance entre deux composants optiques consécutifs est partout identique et notée $d = 1 \text{ cm}$: $d = OS_0 = S_0S_1 = S_1M_1 = S_1S_3 = S_3P = S_0S_2 = S_2S_3$. La distance, notée D , entre la séparatrice (S_2) et la plaque sondée (M_2) , lorsqu'elle est au repos, dépend du positionnement de l'appareil. En général, la distance S_2M_2 vaut ainsi $D + z(t)$. Le miroir (M_1) est en réalité monté sur une vis micrométrique (non représentée) qui permet d'ajuster finement sa distance à la séparatrice (S_1) par un déplacement noté ϵ . La distance S_1M_1 vaut alors $d + \epsilon$.

On négligera les déphasages induits par l'épaisseur et l'indice optique propre des composants optiques car en réalité, un arrangement adéquat des faces réfléchissantes des lames séparatrices permet d'annuler leurs effets. On supposera que les séparatrices sont idéales, c'est-à-dire qu'elles transmettent la moitié de l'énergie et qu'elles réfléchissent l'autre moitié.

Mesure de l'amplitude des vibrations

32. On adoptera le modèle scalaire de la lumière et l'on notera s_1 l'amplitude du rayon de référence à son arrivée sur la photodiode, donné sous sa forme réelle : $s_1 = a_1 \cos(\phi_1)$, où ϕ_1 est le déphasage induit le long du trajet optique $(OS_0S_1M_1S_1S_3P)$. De même, le rayon sonde est noté : $s_2 = a_2 \cos(\phi_2)$. En notant a_0 l'amplitude du laser à la source, exprimer les amplitudes a_1 et a_2 . Pourquoi ne pas avoir simplement placé un miroir, judicieusement orienté, à la place de la séparatrice (S_1) ?
33. Exprimer les déphasages ϕ_1 et ϕ_2 en fonction des distances en jeu et du temps.
34. A quelle condition sur la distance D peut-on obtenir des interférences ? Proposer un ordre de grandeur.
Dans la suite, pour simplifier, on prendra $D = d$.
35. Montrer, en détaillant le raisonnement, que la tension produite par la photodiode s'écrit :

$$U(t) = U_0 \left(1 + \cos \left(4\pi \frac{z(t) - \epsilon}{\lambda_l} \right) \right)$$

où U_0 est une constante dépendant des caractéristiques de la photodiode et de l'intensité de la source laser, que l'on ne cherchera pas à exprimer.

On rappelle que : $2 \cos a \cos b = \cos(a + b) + \cos(a - b)$.

36. On se place dans le cas (très restrictif) des très faibles déformations : $a_z \ll \lambda_l$.
En se plaçant au contact optique ($\epsilon = 0$), représenter l'allure de la tension $U(t)$ mesurée sur un oscilloscope pendant une période de vibration.
Commenter.
37. Comment faut-il agir sur la vis micrométrique pour que la mesure de la vibration soit la plus sensible possible ?
Avec quelle précision faut-il effectuer ce réglage ?
38. Dans ce cas optimisé, tracer l'allure de $U(t)$.
39. Dans le cas où l'amplitude des vibrations est largement plus grande que la longueur d'onde du laser, représenter sur une période de vibration le signal électrique $U(t)$.
40. Comment faudrait-il procéder pour en déduire l'amplitude de vibration a_z sur un oscilloscope ?

Mesure de la vitesse des vibrations

La mesure directe de l'amplitude est ainsi limitée à des régimes précis et pose par ailleurs de nombreuses difficultés techniques. Un second effet permet au vibromètre de mesurer directement la vitesse de déplacement de la plaque. Il s'agit de l'effet Doppler, dû au mouvement du miroir (M_2) lors de la réflexion du rayon sonde. Cet effet, bien connu en acoustique, introduit ici un décalage en fréquence dans le rayon laser réfléchi. Dans toute la suite du problème, on prendra $\epsilon = 0$.

41. La figure 8 montre une succession de fronts d'onde (à la même phase) de période T , se déplaçant à une célérité c_0 en direction d'un miroir avançant à une vitesse v . A l'instant $t = 0$ représenté, un front d'onde atteint le miroir. A $t = T$, le front d'onde suivant a avancé d'une distance correspondant à la longueur d'onde mais le miroir s'est déplacé. L'impact entre ce front et le miroir se produit donc à un instant différent T' (avec $T' > T$ si $v > 0$). Exprimer la période T' en fonction de T et du rapport v/c_0 (on se placera dans le cas non-relativiste où $v \ll c_0$).

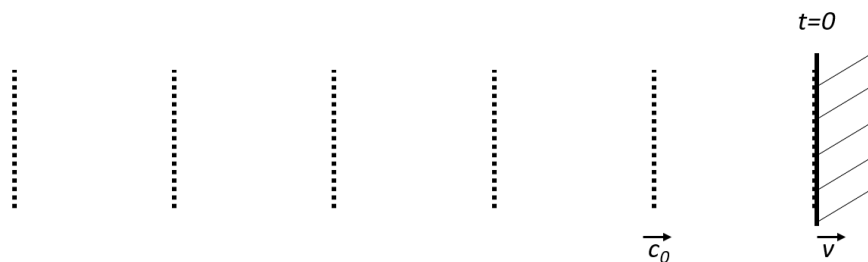


FIGURE 8 – Effet Doppler : les fronts d'ondes (en pointillés) se déplacent à la célérité c_0 et le miroir à une vitesse v .

42. Le miroir agit ainsi comme une source mobile qui émet une onde en direction de (S_2) avec une période T' . On note à nouveau $t = 0$ l'instant auquel un front d'onde est émis. A $t = T'$, ce front d'onde a parcouru une distance $c_0 T'$ en direction de (S_2) alors que le miroir a avancé d'une distance $v T'$. En déduire la longueur d'onde λ'' de l'onde ainsi réémise. Donner alors la période T'' associée en fonction de T' et du rapport v/c_0 .

43. Montrer alors que le décalage en fréquence Doppler f_D défini comme la différence entre les fréquences des signaux réfléchi et incident est donné par :

$$f_D = -2f_l \frac{v}{c_0}$$

44. Calculer la valeur numérique de la fréquence du rayon laser à sa source.
En déduire l'amplitude des variations du décalage Doppler.

Le rayon de référence et le rayon sonde arrivent ainsi sur la photodiode avec des fréquences différentes mais nous allons voir que des interférences sont néanmoins possibles. Dans la suite, on découplera les effets de la position (étudiés ci-dessus) de ceux de la vitesse de la plaque vibrante. Ainsi, on supposera désormais que le seul effet de la plaque est le décalage Doppler de fréquence et on négligera la variation de la distance $S_2 M_2$.

45. Exprimer à nouveau les déphasages ϕ_1 et ϕ_2 .
Développer puis linéariser l'expression de l'intensité lumineuse sur la photodiode à un instant donné.
Pour rappel, on considère désormais que $D = d$.
46. Afin d'établir la formule de Fresnel, il faut classiquement moyenner cette intensité sur le temps. Sur quelle durée typique cette intégration doit-elle être réalisée ?
Expliquer alors pourquoi les deux rayons produisent néanmoins une intensité lumineuse variable dans le temps.
47. Montrer alors que la tension peut s'écrire sous la forme :

$$U(t) = U_0 \left(1 + \cos[2\pi f_D(t)(t - \tau)] \right)$$

où τ est une constante dont on donnera l'expression.

48. Calculer la valeur numérique de τ et commenter.
49. Expliquer pourquoi il n'est pas possible de distinguer le sens de déplacement de la plaque.

Afin de résoudre ce problème, on ajoute classiquement un modulateur acousto-optique (ou réseau de Bragg) sur le trajet du rayon sonde, entre les séparatrices S_0 et S_2 . Ce composant optique effectue un décalage constant en fréquence. Ainsi, en arrivant sur la séparatrice S_2 , la fréquence du laser sonde vaut $f_l + f_B$, avec $f_B = 40$ MHz. Ce décalage permet également à l'électronique interne du vibromètre de fonctionner dans un régime de fréquence plus adapté.

50. Donner alors l'expression de $U(t)$ et expliquer pourquoi ce décalage permet de lever l'indétermination sur le sens de déplacement de la plaque.
51. Avec le réseau de Bragg, le vibromètre repose ainsi sur le principe de modulation de fréquence. Justifier ce terme.
52. Représenter schématiquement le signal $U(t)$ en faisant apparaître de façon exagérée cette modulation.
53. Afin de mesurer la vitesse des vibrations, on réalise le montage électrocinétique présenté sur la figure 9. Montrer que les tensions d'entrée $U(t)$ et de sortie $U_s(t)$ vérifient :

$$\frac{dU}{dt} = \frac{U_s}{RC} + \frac{dU_s}{dt}$$

54. On cherche à utiliser ce circuit en régime dérivateur, c'est-à-dire tel que la tension de sortie soit directement proportionnelle à la dérivée temporelle de la tension d'entrée.
Proposer des valeurs pour R et C afin de se placer dans ce régime.
55. Tracer alors l'allure du signal de sortie $U_s(t)$.

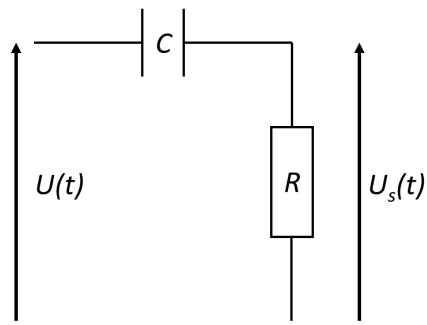


FIGURE 9 – Circuit électrique composé d'une résistance R et d'un condensateur de capacité C .

56. Expliquer comment en déduire l'amplitude des vibrations.

★ *fin* ★