

**Notations**

Dans ce problème, on introduit la notion de produit infini et on l'utilise pour obtenir diverses propriétés.

- La partie I permet d'obtenir des résultats qui seront utilisés dans tout le problème.
- La partie II étudie quelques exemples de calcul de produit infini, dont celui de Wallis, et donne par ailleurs une illustration en probabilités.
- La partie III permet de montrer, sous certaines conditions, la continuité ou le caractère $\mathcal{C}^1$ d'une fonction définie par un produit infini de fonctions.
- La partie IV a pour but d'exprimer la fonction sinus sous forme de produit infini et, en s'appuyant sur la partie III, d'en tirer quelques conséquences.
- Enfin, la partie V étudie la fonction Γ . Elle utilise quelques résultats des parties I, III et IV.

Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $[t]$ la partie entière de t .

Soit $p \in \mathbb{N}$ et $(u_n)_{n \geq p}$ une suite de nombres réels. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq p$,

$$P_n = \prod_{k=p}^n u_k.$$

On dit que la suite $(P_n)_{n \geq p}$ est la suite des produits partiels du produit infini $\prod_{n \geq p} u_n$.

Si la suite $(P_n)_{n \geq p}$ converge, on dit que sa limite est la valeur du produit infini et on pose :

$$\prod_{k=p}^{+\infty} u_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n.$$

I Résultats préliminaires

I.A — Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Q 1. Montrer que, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\left| \left(\prod_{k=1}^n (1 + x_k) \right) - 1 \right| \leq \left(\prod_{k=1}^n (1 + |x_k|) \right) - 1.$$

Q 2. Montrer que, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in [-1, +\infty[^n$,

$$\prod_{k=1}^n (1 + x_k) \leq \exp \left(\sum_{k=1}^n x_k \right).$$

I.B — Soit $z \in \mathbb{C}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \left(1 + \frac{z}{n} \right)^n.$$

Le but de cette sous-partie est de montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers e^z .

Q 3. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{C}$,

$$|(1+t) - e^t| \leq |t|^2 e^{|t|}.$$

Q 4. Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note $M = \max\{|a|, |b|\}$.

Montrer que $|a^n - b^n| \leq nM^{n-1}|a - b|$.

Q 5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left| \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n - e^z \right| \leq \frac{|z|^2}{n} e^{|z|}$.

Q 6. Conclure que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers e^z .

II Exemples de calcul de produit infini

II.A – Q 7. Calculer $\prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ et $\prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$.

On pourra, pour tout $N \geq 2$, établir une expression de $\prod_{n=2}^N \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ et de $\prod_{n=2}^{2N} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$.

II.B – Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos u)^n du.$$

Q 8. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$ et en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Q 9. Déterminer un équivalent de la suite $(W_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ et en déduire $\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{4n^2 - 1}\right)$.

II.C – On considère $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements indépendants tels que la série numérique $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(A_n)$ diverge.

Q 10. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\prod_{p=n}^{+\infty} (1 - \mathbb{P}(A_p)) = 0$.

On pourra utiliser l'inégalité démontrée en Q 2.

Q 11. En déduire que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{p \geq n} A_p\right) = 1$.

III Étude d'une fonction définie par un produit infini

On considère dans cette partie :

— a et b deux réels tels que $a < b$ et le segment $\mathcal{S} = [a, b]$.

— $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions définies sur $\mathcal{S}$ à valeurs dans $] -1, +\infty[$.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathcal{S}$:

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^n (1 + f_k(x)), \quad Q_n(x) = \prod_{k=1}^n (1 + |f_k(x)|), \quad \text{et sous condition d'existence } R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)|.$$

III.A – On suppose dans cette sous-partie que $(f_n)_{n \geq 1}$ est une suite de fonctions continues sur $\mathcal{S}$ et que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} |f_n|$ converge uniformément sur $\mathcal{S}$ vers la fonction R_0 .

Q 12. Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $x \in \mathcal{S}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$Q_{n+1}(x) - Q_n(x) \leq e^M |f_{n+1}(x)|.$$

Q 13. Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{S}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|P_{n+1}(x) - P_n(x)| \leq Q_{n+1}(x) - Q_n(x).$$

Q 14. En déduire que la suite de fonctions $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathcal{S}$ vers la fonction P définie sur $\mathcal{S}$ par :

$$P : \begin{cases} \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \prod_{n=1}^{+\infty} (1 + f_n(x)) \end{cases}$$

Q 15. Montrer que la fonction P est continue et ne s'annule pas sur $\mathcal{S}$.

III.B – Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $f(x) = \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - e^{-nx^2})$.

Q 16. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Q 17. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$ puis calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

III.C – On suppose dans cette sous-partie que $(f_n)_{n \geq 1}$ est une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{S}$ telle que :

— la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} |f_n|$ converge uniformément sur $\mathcal{S}$.

— la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{f'_n}{1 + f_n}$ converge uniformément sur $\mathcal{S}$.

Q 18. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathcal{S}$,

$$P'_n(x) = P_n(x) \sum_{k=1}^n \frac{f'_k(x)}{1 + f_k(x)}.$$

Q 19. En déduire que la fonction

$$P : \begin{cases} \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \prod_{n=1}^{+\infty} (1 + f_n(x)) \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{S}$ et que

$$\forall x \in \mathcal{S}, \frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f'_n(x)}{1 + f_n(x)}.$$

IV Expression de la fonction sinus comme produit infini

IV.A – Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$P_n(X) = \frac{1}{2i} \left(\left(1 + \frac{iX}{2n+1} \right)^{2n+1} - \left(1 - \frac{iX}{2n+1} \right)^{2n+1} \right).$$

Dans les questions Q20 à Q23, on fixe un entier naturel n .

Q 20. Montrer que P_n est un polynôme de degré $2n+1$.

Q 21. Pour tout $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$, on note $x_k = (2n+1) \tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$. Montrer que l'ensemble des racines de P_n est $\{x_k \mid k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket\}$.

Q 22. En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que

$$P_n(X) = \lambda X \prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{X^2}{x_j^2} \right).$$

Q 23. En calculant $P'_n(0)$, montrer que :

$$P_n(X) = X \prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{X^2}{x_j^2} \right).$$

Q 24. Montrer que la suite de fonctions $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction sinus.

IV.B – Dans cette sous-partie, on fixe un réel x et on considère la suite de fonctions $(v_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, v_k : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} x \prod_{j=1}^k \left(1 - \frac{x^2}{\left(\tan\left(\frac{j\pi}{2[t]+1}\right) (2[t]+1) \right)^2} \right) & \text{si } t \geq k \\ P_{[t]}(x) & \text{si } t < k. \end{cases} \end{cases}$$

Q 25. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq 2$,

$$|v_k(t) - v_{k-1}(t)| \leq \frac{x^2}{k^2 \pi^2} |v_{k-1}(t)|.$$

Q 26. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et $k \in \mathbb{N}^*$,

$$|v_k(t)| \leq |x| \exp \left(\sum_{j=1}^k \frac{x^2}{(j\pi)^2} \right).$$

Q 27. En déduire que la série de fonctions $\sum_{k \geq 2} (v_k - v_{k-1})$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Q 28. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} v_k(t)$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} v_k(t)$.

Q 29. En déduire que :

$$\sin(x) = x \prod_{j=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{(j\pi)^2} \right).$$

IV.C –

Q 30. Montrer que, pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$,

$$\frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{x} - \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{2x}{(j\pi)^2 - x^2}.$$

Q 31. En déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

On pourra dans un premier temps déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x^2 \sin(x)}$.

V Autour de la fonction Γ

V.A – Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Q 32. Montrer que Γ est une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose

$$g_n(x) = \int_0^1 u^{x-1} (1-u)^n du.$$

Q 33. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$g_n(x) = \frac{n!}{\prod_{k=0}^n (x+k)}.$$

Q 34. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = \Gamma(x).$$

Q 35. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{\prod_{k=0}^n (x+k)}$.

V.B – Q 36. Soit $x \in]0, 1[$. Montrer que $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$.

V.C – Q 37. Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1).$$

Q 38. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\Gamma(x) = \frac{e^{-\gamma x}}{x} \prod_{n=1}^{+\infty} e^{\frac{x}{n}} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-1}.$$

• • • FIN • • •
