A2023 – MATH I PC

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2023

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Quelques inégalités de convexité autour du déterminant

Notations et résultats admis

— Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $M_n(\mathbf{R})$ (resp. $M_{n,1}(\mathbf{R})$) l'ensemble des matrices de taille $n \times n$ (resp. $n \times 1$) à coefficients réels.

— La matrice identité de $M_n(\mathbf{R})$ est notée I_n.

— Si $A \in M_n(\mathbf{R})$, $\det(A)$ est le déterminant de la matrice A, $\operatorname{Tr}(A)$ sa trace, $\operatorname{Sp}(A)$ son spectre et $A^\top$ sa transposée.

— On note $S_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices symétriques à coefficients réels de taille $n \times n$.

— Sur $M_{n,1}(\mathbf{R})^2$, on définit l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ par

$$\forall (X, Y) \in M_{n,1}(\mathbf{R})^2, \quad \langle X, Y \rangle = X^\top Y$$

où $X^\top$ est la transposée de X. On admet que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $M_{n,1}(\mathbf{R})$. On note $\|\cdot\|$ la norme associée.

— On admet que l'application $A \in M_n(\mathbf{R}) \mapsto \|A\|_2 = \sqrt{\operatorname{Tr}(A^\top A)}$ est une norme sur $M_n(\mathbf{R})$.

— On note $S_n^+(\mathbf{R})$ (resp. $S_n^{++}(\mathbf{R})$) l'ensemble des matrices symétriques $S \in S_n(\mathbf{R})$ telles que

$$\forall X \in M_{n,1}(\mathbf{R}) \setminus \{0\}, \quad \langle SX, X \rangle \geq 0 \ \text{(resp. } > 0).$$

— Soit C une partie non vide d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E. On dit que C est convexe si : pour tous $x, y \in C$ et pour tout $t \in [0,1]$, $(1-t)x + ty \in C$.

— On admet que si C est une partie convexe d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E, alors pour tout $p \in \mathbf{N}^\star$, pour tout $(x_1, \ldots, x_p) \in C^p$ et pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in (\mathbf{R}_+)^p$ tel que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$, alors $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \in C$.

— Une application $f : C \to \mathbf{R}$ définie sur une partie convexe C d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel

E est dite convexe si

$$\forall (x,y) \in C^2,\ \forall t \in [0,1], \quad f((1-t)x + ty) \leq (1-t) f(x) + t f(y).$$

— Une application $f : C \to \mathbf{R}$ définie sur une partie convexe C d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E est dite concave si son opposé, $-f$, est convexe, c'est-à-dire

$$\forall (x,y) \in C^2,\ \forall t \in [0,1], \quad f((1-t)x + ty) \geq (1-t) f(x) + t f(y).$$

Partie 1 : Questions préliminaires

1 ▷ Montrer qu'une matrice $S \in S_n(\mathbf{R})$ appartient à $S_n^+(\mathbf{R})$ si, et seulement si, $\mathrm{Sp}(S) \subset \mathbf{R}_+$.

De même, on admettra dans la suite du problème que : $S \in S_n^{++}(\mathbf{R})$ si, et seulement si, $\mathrm{Sp}(S) \subset \mathbf{R}_+^\star$.

2 ▷ Montrer que $S_n^+(\mathbf{R})$ et $S_n^{++}(\mathbf{R})$ sont des parties convexes de $M_n(\mathbf{R})$. Sont-elles des sous-espaces vectoriels de $M_n(\mathbf{R})$?

3 ▷ Montrer que, si $A \in S_n^{++}(\mathbf{R})$, il existe $S \in S_n^{++}(\mathbf{R})$ telle que $A = S^2$.

4 ▷ Soit I intervalle de $\mathbf{R}$. Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction convexe. Montrer que, pour tout $p \in \mathbf{N}^\star$, pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in (\mathbf{R}_+)^p$ tel que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$ et pour tout $(x_1, \ldots, x_p) \in I^p$, on a :

$$f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i).$$

Indication : On pourra procéder par récurrence sur p.

Partie 2 : Une première inégalité de convexité

Soit $M \in S_n^+(\mathbf{R})$ une matrice non nulle.

5 ▷ Montrer l'inégalité $\dfrac{\operatorname{Tr}(M)}{n} \geq \det{}^{1/n}(M)$.

Indication : On pourra montrer que $x \mapsto -\ln(x)$ est convexe sur $\mathbf{R}_+^\star$.

On pourra dans la suite de cette partie utiliser, sans la prouver, l'inégalité ci-dessous

$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbf{R}_+)^n$,

$$2 \max\{x_1, \ldots, x_n\} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k - \prod_{k=1}^{n} x_k^{1/n} \right) \geq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(x_k - \prod_{j=1}^{n} x_j^{1/n} \right)^2 .$$

6 ▷ Exprimer $\|M\|_2$ en fonction des valeurs propres de M.

7 ▷ En déduire que

$$\frac{\operatorname{Tr}(M)}{n} - \det{}^{1/n}(M) \geq \frac{\left\| M - \det{}^{1/n}(M)\, I_n \right\|_2^2}{2n \|M\|_2}.$$

Partie 3 : On continue avec de la convexité

8 ▷ Soient $A \in S_n^{++}(\mathbf{R})$ et $B \in S_n(\mathbf{R})$. Montrer qu'il existe une matrice diagonale $D \in M_n(\mathbf{R})$ et $Q \in GL_n(\mathbf{R})$ telles que $B = QDQ^\top$ et $A = QQ^\top$. Que dire des éléments diagonaux de D si $B \in S_n^{++}(\mathbf{R})$?

Indication : On pourra utiliser la question 3.

9 ▷ Étudier la convexité de la fonction $t \mapsto \ln(1 + \mathrm{e}^t)$.

10 ▷ Montrer l'inégalité

$$\forall (A, B) \in S_n^{++}(\mathbf{R})^2, \quad \det{}^{1/n}(A + B) \geq \det{}^{1/n}(A) + \det{}^{1/n}(B) .$$

11 ▷ Montrer que, si A et B appartiennent $S_n^{++}(\mathbf{R})$, alors :

$$\forall t \in [0, 1], \quad \det((1-t)A + tB) \geq \det(A)^{1-t} \det(B)^t .$$

Justifier que cette inégalité reste valable pour A et B seulement dans $S_n^+(\mathbf{R})$.

12 ▷ Que peut-on en déduire sur la fonction $\ln \circ \det$ sur $S_n^{++}(\mathbf{R})$?

Partie 4 : Encore de la convexité !

Soit $A \in S_n^{++}(\mathbf{R})$ et soit $g : t \in \mathbf{R} \mapsto \det(I_n + tA)$.

13 ▷ Exprimer, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $g(t)$ à l'aide des valeurs propres de A. En déduire que g est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$.

14 ▷ Soit $f : t \mapsto \ln(\det(I_n + tA))$. Montrer que

$$\forall t \in \mathbf{R}_+, \quad \ln(\det(I_n + tA)) \leq \operatorname{Tr}(A)\, t.$$

Partie 5 : Et pour finir... de la convexité !

Soient $A \in S_n^{++}(\mathbf{R})$ et $M \in S_n(\mathbf{R})$. Soit l'application f_A définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f_A(t) = \det(A + tM).$$

15 ▷ Montrer que f_A est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$.

16 ▷ Montrer qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout $t \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$, $A + tM \in S_n^{++}(\mathbf{R})$.

17 ▷ Montrer que $f_A(t) \underset{t \to 0}{=} \det(A) + \det(A)\operatorname{Tr}(A^{-1}M)t + o(t)$.

Indication : On pourra commencer par traiter le cas où $A = I_n$.

18 ▷ Déterminer $f_A'(t)$ pour tout $t \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$.

19 ▷ On admet que la fonction $\Phi : t \mapsto (A + tM)^{-1}$ est de classe C^1 sur $]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$. En remarquant que $\Phi(t) \times (A + tM) = I_n$, montrer que

$$\Phi(t) \underset{t \to 0}{=} A^{-1} - A^{-1}MA^{-1}t + o(t).$$

Soit $\alpha \in \left]-\frac{1}{n}, +\infty\right[\setminus \{0\}$. On définit l'application φ_α par

$$\forall t \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[,\ \varphi_\alpha(t) = \frac{1}{\alpha} \det{}^{-\alpha}(A + tM).$$

20 ▷ Montrer que φ_α est dérivable sur $]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$ et que

$$\forall t \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[, \quad \varphi'_\alpha(t) = -\mathrm{Tr}\left((A + tM)^{-1}M\right) \det{}^{-\alpha}(A + tM).$$

21 ▷ Montrer que φ_α est deux fois dérivable en 0 et que

$$\varphi''_\alpha(0) = \det{}^{-\alpha}(A) \left(\alpha \mathrm{Tr}^2(A^{-1}M) + \mathrm{Tr}\left((A^{-1}M)^2\right)\right).$$

22 ▷ Montrer que $A^{-1}M$ est semblable à une matrice symétrique réelle.

Indication : On pourra utiliser la question 3.

23 ▷ En déduire que $\varphi''_\alpha(0) \geq 0$.

24 ▷ Montrer que, si $\varphi''_\alpha(0) > 0$, alors il existe $\eta > 0$, tel que pour tout $t \in]-\eta, \eta[$,

$$\frac{1}{\alpha} \det{}^{-\alpha}(A + tM) \geq \frac{1}{\alpha} \det{}^{-\alpha}(A) - \mathrm{Tr}(A^{-1}M) \det{}^{-\alpha}(A) t.$$

Fin du problème