Mathématiques 2

TSI

2023

4 heures — Calculatrice autorisée

Notations et rappels

Lorsque n et p sont deux entiers naturels non nuls, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients réels et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $M^\top$ sa transposée.

On identifie un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et une matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on note $\mathrm{Vect}\big((u_i)_{i\in I}\big)$ le sous-espace vectoriel engendré par cette famille.

Le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est défini par l'égalité $\langle X, Y\rangle = X^\top Y$, pour tous X, Y dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

Si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note χ_M son polynôme caractéristique et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$ l'ensemble de ses valeurs propres complexes.

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ orienté par sa base canonique, on note $u \wedge v$ le produit vectoriel des deux vecteurs u et v.

Objectif du problème et articulations entre ses différentes parties

Ce problème étudie les trajectoires de certaines équations différentielles et de certains systèmes différentiels linéaires à coefficients constants.

La partie I, consacrée à l'étude d'une équation différentielle linéaire du deuxième ordre, est indépendante des parties II et III. Dans les parties II et III, on étudie des trajectoires des solutions $t \mapsto X(t)$ à valeurs dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de problèmes de Cauchy de la forme

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

selon les propriétés de la matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et de la condition initiale X_0 dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

I Une équation différentielle linéaire du second ordre

On étudie dans cette partie l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$x''(t) + kx(t) = 0 \tag{I.1}$$

où x est une fonction inconnue deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, t une variable réelle et k un paramètre réel non nul.

On appelle *trajectoire* d'une solution x de (I.1) l'arc paramétré du plan défini par

$$\left|\begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & M(t) = \big(x(t), x'(t)\big) \end{array}\right.$$

où le point $M(t)$ a pour abscisse $x = x(t)$ et pour ordonnée $y = x'(t)$.

On dit qu'une trajectoire est bornée si ses deux fonctions coordonnées sont bornées sur $\mathbb{R}$.

I.A – Conservation de l'énergie

Si x est une solution de (I.1), on appelle énergie la fonction E définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad E(t) = \frac{1}{2}\left(kx(t)^2 + x'(t)^2\right).$$

Q 1. Justifier que la fonction E est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

On note $h = E(0)$.

Q 2. En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, le point $M(t)$ appartient à la courbe d'équation cartésienne

$$kx^2 + y^2 = 2h.$$

I.B – Cas où k est strictement positif

Dans cette sous-partie, on suppose que k est un nombre réel strictement positif et on note ω la racine carrée positive de k. L'équation (I.1) s'écrit donc $x''(t) + \omega^2 x(t) = 0$.

Q 3. Donner une base de l'espace vectoriel de ses solutions et exprimer la solution correspondant aux conditions initiales $\big(x(0), x'(0)\big) = (a, b)$, où a et b sont deux réels fixés.

Q 4. Démontrer qu'il existe un angle $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $x(0) = \dfrac{\sqrt{2h}}{\omega}\cos\theta$ et $x'(0) = \sqrt{2h}\sin\theta$.

Q 5. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x(t) = \dfrac{\sqrt{2h}}{\omega}\cos(\omega t - \theta)$ et vérifier que les trajectoires sont bornées.

Q 6. Déterminer les solutions dont l'énergie est nulle.

I.C – Cas où k est strictement négatif

Dans cette sous-partie, on suppose que k est un nombre réel strictement négatif et on note ω la racine carrée positive de $-k$.

Q 7. L'équation (I.1) s'écrit donc $x''(t) - \omega^2 x(t) = 0$. Donner une base de l'espace vectoriel de ses solutions et exprimer la solution correspondant aux conditions initiales $\big(x(0), x'(0)\big) = (a, b)$, où a et b sont deux réels fixés.

Q 8. Déterminer toutes les solutions d'énergie nulle et déterminer la nature géométrique de leurs trajectoires.

Q 9. Démontrer que la seule trajectoire bornée correspond à la solution identiquement nulle.

II Étude des trajectoires de systèmes linéaires

II.A – Exemple d'un frottement visqueux en dimension 2

On considère l'équation différentielle

$$x'' + 2\alpha x' + \omega^2 x = 0 \tag{II.1}$$

où α et ω sont des réels tels que $\alpha > \omega > 0$.

Si x est une solution de (II.1), on lui associe la fonction vectorielle

$$X : \left| \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \to & \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ t & \mapsto & X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

On appelle désormais *trajectoire* de x (ou de X) l'arc paramétré $t \mapsto X(t)$.

On dit que la trajectoire de x est *bornée* si et seulement s'il existe $M \geqslant 0$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\|X(t)\| \leqslant M$, où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne sur $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, ce qui revient à dire que les deux coordonnées de X sont des fonctions bornées.

Q 10. Justifier que cette équation différentielle est équivalente au système différentiel

$$X'(t) = AX(t) \qquad \text{où} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\alpha \end{pmatrix}.$$

Q 11. Préciser si la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et donner le cas échéant une base de vecteurs propres.

Q 12. Donner la dimension de l'espace vectoriel formé par les solutions du système différentiel $X' = AX$, où la fonction inconnue X est à valeurs dans $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, et déterminer une base de cet espace. En déduire que les solutions de l'équation différentielle (II.1) sont bornées sur $\mathbb{R}_+$. Sont-elles bornées sur $\mathbb{R}$?

II.B – Résultats préliminaires sur le comportement des trajectoires

Dans cette sous-partie, n est un entier naturel non nul et A est une matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On note w_A l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A. On rappelle qu'il est défini en posant, pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $w_A(Y) = AY$. On appelle noyau de A le noyau de l'endomorphisme w_A.

On suppose enfin que X est la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

où X_0 est un vecteur dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On rappelle qu'un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est stable par une matrice A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (respectivement par un endomorphisme w) si pour tout $Y \in F$, on a $AY \in F$ (respectivement $w(Y) \in F$).

On admet que, si F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ stable par w_A et si $X_0 \in F$, alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t) \in F$.

II.B.1) On suppose, dans les deux questions qui suivent, que X_0 est un vecteur propre de A pour une valeur propre réelle λ.

Q 13. Démontrer que, pour tout nombre réel t, il existe un nombre réel $a(t)$ tel que $X(t) = a(t)X_0$.

On admet que la fonction a est de classe $\mathcal{C}^1$.

Q 14. En déduire une expression de $X(t)$ en fonction de X_0, λ et t.

Q 15. En déduire que, si la trajectoire de X est bornée sur $\mathbb{R}$, quelle que soit la condition initiale $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors 0 est la seule valeur propre réelle possible de A.

Dans toute la suite du problème, on admet le résultat suivant :

Proposition 1

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et si la trajectoire de la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t), \\ X(0) = X_0, \end{cases}$$

est bornée sur $\mathbb{R}$, quelle que soit la condition initiale $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors toutes les valeurs propres de A dans $\mathbb{C}$ ont une partie réelle égale à 0.

II.B.2) Dans cette section, on suppose que X_0 appartient à $\ker(A^2)$ mais n'appartient pas à $\ker A$.

Q 16. Démontrer que la famille (X_0, AX_0) est libre.

On admet que le plan $\mathrm{Vect}(X_0, AX_0)$ est stable par l'endomorphisme w canoniquement associé à A et qu'il existe deux fonctions a et b de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t) = a(t)X_0 + b(t)AX_0$.

Q 17. Déterminer les fonctions a et b. En déduire la nature géométrique de la trajectoire de X. Est-elle bornée sur $\mathbb{R}$?

II.C – Étude de certaines trajectoires pseudo-périodiques

On suppose dans toute cette sous-partie II.C que μ est un nombre réel strictement positif, que φ est un nombre réel n'appartenant pas à $\pi\mathbb{Z}$ et que X_0 est un élément non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifiant

$$(A^2 - 2\mu\cos\varphi\, A + \mu^2 I_n)X_0 = 0.$$

On note toujours X la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t), \\ X(0) = X_0. \end{cases}$$

Q 18. Justifier que l'équation $x^2 - 2x\mu\cos\varphi + \mu^2 = 0$, d'inconnue x, n'admet pas de racine réelle.

Q 19. En déduire que la famille (X_0, AX_0) est libre.

Comme dans la question 17, on admet que le plan $\mathrm{Vect}(X_0, AX_0)$ est stable par l'endomorphisme canoniquement associé à A et qu'il existe deux fonctions a et b de classe $\mathcal{C}^1$ telles que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t) = a(t)X_0 + b(t)AX_0$.

Q 20. Démontrer que les fonctions a et b sont de classe $\mathcal{C}^2$ et que

$$\begin{cases} a(0) = 1, \\ a'(0) = 0, \\ a''(t) - 2a'(t)\mu\cos\varphi + \mu^2 a(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Q 21. En déduire une expression de $a(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

On admet que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $b(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mu t \cos\varphi}}{\mu \sin\varphi} \sin(\mu t \sin\varphi)$.

Q 22. Montrer que la fonction X est bornée sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\cos\varphi = 0$.

On suppose à présent que $\cos\varphi = 0$.

Q 23. Justifier que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $b(t) = \dfrac{1}{\mu}\sin(\mu t)$.

Q 24. Calculer $\|X(t)\|^2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Q 25. En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\|X(t)\|^2\big) = 2\cos(2\mu t)\langle X_0, AX_0\rangle + \frac{1}{\mu}\sin(2\mu t)\big(\|AX_0\|^2 - \mu^2\|X_0\|^2\big).$$

Q 26. Montrer que la trajectoire de X est contenue dans un cercle de centre $(0,0)$ si et seulement si $\langle X_0, AX_0\rangle = 0$ et $\|AX_0\| = \mu\|X_0\|$.

On a montré en particulier le résultat suivant qu'on pourra utiliser dans la suite du problème :

Proposition 2

Si X est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t), \\ X(0) = X_0, \end{cases}$$

et si X_0 appartient au noyau d'une matrice de la forme $A^2 + \mu^2 I_n$, avec $\mu \in \mathbb{R}^{+*}$, alors la trajectoire de X est dans le plan $\mathrm{Vect}(X_0, AX_0)$. Cette trajectoire est tracée dans un cercle du plan $\mathrm{Vect}(X_0, AX_0)$ si et seulement si $\langle X_0, AX_0\rangle = 0$ et $\|AX_0\| = \mu\|X_0\|$.

III Étude des trajectoires sphériques

III.A – Cas des matrices antisymétriques

III.A.1)

Q 27. Démontrer que, pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et tout couple (X, Y) de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$,

$$X^\top AY = Y^\top A^\top X.$$

On dit qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *antisymétrique* si $A^\top = -A$.

Q 28. Démontrer que si la matrice A est antisymétrique alors, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$X^\top AX = 0.$$

III.A.2)

Réciproquement, on suppose que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^\top AX = 0$.

Q 29. Démontrer que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $AX = -A^\top X$.

On pourra calculer de deux manières différentes $(X+Y)^\top A(X+Y)$.

Q 30. En déduire que la matrice A est antisymétrique.

III.A.3)

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $X : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ une solution de classe $\mathcal{C}^1$ du système différentiel $X'(t) = AX(t)$. On dit que la trajectoire de X est *sphérique* s'il existe $Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $r \geqslant 0$ tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\|X(t) - Z\| = r$.

Q 31. On suppose que A est une matrice antisymétrique. Étudier la fonction $t \mapsto \|X(t)\|^2$ et en déduire que la trajectoire de X est sphérique.

III.B – Caractérisation du cas où les trajectoires sont sphériques en dimension 2

Dans cette sous-partie, on suppose que $n = 2$ et on suppose que la matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est non nulle et que les trajectoires du système différentiel $X' = AX$ sont sphériques, quelle que soit la condition initiale X_0.

Q 32. Justifier que 0 est la seule valeur propre réelle possible pour la matrice A.

On pourra utiliser le résultat de la question 15.

Q 33. On suppose que le polynôme caractéristique de A est scindé dans $\mathbb{R}[X]$. Justifier que la matrice A est trigonalisable et que $A^2 = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$. En utilisant le résultat des questions 16 et 17, démontrer que $\ker A = \ker A^2$ et aboutir à une contradiction.

Q 34. Justifier que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et qu'il existe un nombre réel μ non nul tel que $A^2 = -\mu^2 I_2$.

On pourra utiliser le résultat de la proposition 1.

Q 35. Étant donné un vecteur $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, justifier l'égalité $\langle X_0, AX_0 \rangle = 0$.

On pourra considérer la trajectoire de la solution du système $X'(t) = AX(t)$ vérifiant la condition initiale $X(0) = X_0$ et utiliser le résultat de la proposition 2.

Q 36. En déduire que toutes les trajectoires du système différentiel $X'(t) = AX(t)$ sont sphériques si et seulement si la matrice A est antisymétrique.

III.C – Systèmes différentiels à trajectoires sphériques en dimension 3

Dans cette sous-partie, on suppose que $n = 3$ et que l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est orienté par sa base canonique.

On dit qu'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ est antisymétrique si sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est antisymétrique.

Q 37. On considère un vecteur $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ non nul dans $\mathbb{R}^3$. Démontrer que l'application

$$f_\omega : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ x & \mapsto & \omega \wedge x \end{array} \right.$$

est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et que cet endomorphisme est antisymétrique.

On considère un vecteur v non nul dans $\mathbb{R}^3$ et orthogonal à ω. On admet que l'application

$$g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ x & \mapsto & \omega \wedge x + \langle x, \omega \rangle v \end{array} \right.$$

est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

On considère une fonction $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ de classe $\mathcal{C}^1$ qui vérifie, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X'(t) = g\big(X(t)\big)$, c'est-à-dire $X'(t) = \omega \wedge X(t) + \langle X(t), \omega \rangle v$.

L'objectif des questions suivantes est de montrer que la trajectoire de X est sphérique.

Q 38. Pour tous vecteurs x, y et z dans $\mathbb{R}^3$, montrer l'égalité $x \wedge (y \wedge z) = \langle x, z \rangle y - \langle x, y \rangle z$.

On pourra, par exemple, considérer d'abord le cas où la famille (y, z) est liée. Puis, lorsqu'elle est libre, on pourra considérer une base orthonormée (e_2, e_3) du plan $\mathrm{Vect}(y, z)$ choisie de manière à écrire $y = y_2 e_2$ et $z = z_2 e_2 + z_3 e_3$, où y_2, z_2 et z_3 sont des réels. On posera alors $e_1 = e_2 \wedge e_3$ et on écrira $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$, où x_1, x_2, x_3 sont des réels.

Q 39. Calculer $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\langle X(t), \omega \rangle\big)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et en déduire qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\langle X(t), \omega \rangle = K$.

Q 40. On pose $\alpha = \dfrac{K}{\|\omega\|^2}$ et $a = \alpha(\omega + \omega \wedge v)$. Montrer qu'il existe une constante réelle C telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\|X(t) - a\|^2 = \|X(t)\|^2 - 2\alpha \langle X(t), \omega \wedge v \rangle + C.$$

Q 41. En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\|X(t) - a\|^2\big) = 2\langle X(t), \omega \rangle \langle X(t), v \rangle - 2\alpha \langle \omega \wedge X(t), \omega \wedge v \rangle$.

Q 42. En interprétant $\langle \omega \wedge X(t), \omega \wedge v \rangle$ comme un déterminant, justifier l'égalité $\langle \omega \wedge X(t), \omega \wedge v \rangle = \langle X(t), v \rangle \|\omega\|^2$.

Q 43. En déduire que la trajectoire de X est sphérique.

• • • FIN • • •