Mathématiques 2

PC

2023

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures — Calculatrice autorisée

Notations

$\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficient réels.

$(H_j)_{j\in\mathbb{N}}$ désigne la famille de polynômes définie par $H_0 = 1$ et, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $H_j = \dfrac{1}{j!}\displaystyle\prod_{i=0}^{j-1}(X-i)$.

Pour $(k,n) \in \mathbb{N}^2$, on note $\dbinom{n}{k}$ le coefficient binomial k parmi n. On a $\dbinom{0}{0} = 1$ et $\dbinom{n}{k} = 0$ si $k > n$.

$[\![a,b]\!]$ désigne l'ensemble des entiers compris entre a et b. Ainsi, $[\![a,b]\!] = \{n \in \mathbb{Z} \mid a \leqslant n \leqslant b\}$.

I Utilisation de séries entières

I.A – Une première formule

Q 1. Donner sans démonstration le rayon de convergence et la somme de la série entière réelle $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} x^n$.

Q 2. En déduire le rayon de convergence et la somme de la série entière réelle $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} nx^n$.

Q 3. Pour $k \in \mathbb{N}$, montrer que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\binom{n}{k}x^n$ admet 1 pour rayon de convergence et que, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n}{k}x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}. \tag{I.1}$$

I.B – Utilisation d'une famille de polynômes

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $f_k : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^k x^n$.

Q 4. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, f_k est définie sur $]-1,1[$.

Q 5. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $(H_0, \dots, H_k)$ est une base de $\mathbb{R}_k[X]$ et qu'il existe une unique famille $(\alpha_{k,0}, \dots, \alpha_{k,k})$ dans $\mathbb{R}^{k+1}$ telle que $X^k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k}\alpha_{k,j}H_j$.

Q 6. Pour $k \in \mathbb{N}$, donner les valeurs de $\alpha_{k,0}$ et $\alpha_{k,k}$.

Q 7. Pour tout couple $(j,k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $1 \leqslant j \leqslant k$, montrer que $\alpha_{k,j} = j^k - \displaystyle\sum_{i=0}^{j-1}\binom{j}{i}\alpha_{k,i}$.

Q 8. Écrire une fonction Python `alpha` qui prend un couple d'entiers (k,j) en paramètre et qui renvoie la valeur de $\alpha_{k,j}$. On supposera avoir accès à une fonction `binome` telle que `binome(n, k)` renvoie le coefficient binomial $\dbinom{n}{k}$.

Q 9. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme réel P_k tel que, pour tout $x \in]-1,1[$, $f_k(x) = \dfrac{P_k(x)}{(1-x)^{k+1}}$ et que ce polynôme vérifie la relation

$$P_k = \sum_{j=0}^{k} \alpha_{k,j} X^j (1-X)^{k-j}.$$

Q 10. À l'aide de la fonction Python `alpha`, écrire une fonction Python `P` qui prend l'entier k en paramètre et qui renvoie la liste des coefficients de degré 0 à k de P_k.

Q 11. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P_{k+1} = X(1-X)P_k' + (k+1)XP_k$.

Q 12. Calculer explicitement P_2 et P_3.

Q 13. Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, le degré de P_k ainsi que son coefficient dominant.

Q 14. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in]0,1[$, $x^{k+1} P_k\left(\dfrac{1}{x}\right) = P_k(x)$.

Q 15. En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $j \in [\![0,k]\!]$, un lien entre les coefficients de degré j et $k+1-j$ de P_k.

I.C – Une dernière formule

On s'intéresse dans cette sous-partie à la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dbinom{2n}{n} x^n$ dont on note R le rayon de convergence.

Q 16. Déterminer R et montrer que, pour tout $x \in]-R,R[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$.

Q 17. Montrer que, pour tout $x \in]-R,R[\setminus \{0\}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}. \tag{I.2}$$

Q 18. En déduire que, pour tout $x \in]-R,R[\setminus \{0\}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} x^n = \frac{1}{2x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}} - 1\right).$$

Q 19. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} = \frac{1}{2}\binom{2n+2}{n+1}. \tag{I.3}$$

II Étude de sommes doubles

On considère dans cette partie des familles de nombres réels indexées par $\mathbb{N}^2$ c'est-à-dire du type $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$. Dans ce contexte, on se demande s'il est possible de définir les quantités $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j}$ et $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,j}$ et si ces quantités, lorsqu'elles sont définies, sont nécessairement égales.

On rappelle et on admet les deux résultats suivants.

- Si $a_{i,j} \geqslant 0$ pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, alors les deux sommes $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j}$ et $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,j}$ existent dans $[0,+\infty]$ et sont égales. En particulier (cas d'une famille sommable de réels positifs), si l'une des sommes est finie, l'autre aussi et elles sont égales.

- (Cas d'une famille sommable de réels quelconques.) Si $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est une famille de nombres réels telle que la somme $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} |a_{i,j}|$ est finie, alors les sommes $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j}$ et $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,j}$ existent et sont égales.

II.A – Applications

II.A.1) Une première application

Soit $x \in]-1,1[$.

Q 20. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{nx^n}{1-x^n}$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} nx^{n(1+k)}$.

Q 21. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{p\geqslant 1} \frac{x^p}{(1-x^p)^2}$ converge et que sa somme est égale à celle de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{nx^n}{1-x^n}$.

II.A.2) Une seconde application

On admet que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Q 22. Montrer que l'on peut définir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle u_n = n\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3(k+1)}$.

Q 23. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge et calculer sa somme.

II.B – Contre-exemples

II.B.1) Un premier contre-exemple

On considère la famille $(b_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ définie, pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, par $b_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j, \\ -1 & \text{si } i = j, \\ \dfrac{1}{2^{j-i}} & \text{si } i < j. \end{cases}$

Q 24. Montrer l'existence de $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} b_{i,j}$ et calculer sa valeur.

Q 25. Montrer l'existence de $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} b_{i,j}$ et calculer sa valeur.

Q 26. A-t-on $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} b_{i,j} = \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} b_{i,j}$?

II.B.2) Un second contre-exemple

On considère la famille $(c_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ définie, pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, par $c_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j, \\ j & \text{si } i = j, \\ -2i3^{i-j} & \text{si } i < j. \end{cases}$

Q 27. Montrer l'existence de $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} c_{i,j}$ et calculer sa valeur.

Q 28. Soit $j \in \mathbb{N}$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{i\geqslant 0} c_{i,j}$ converge et que $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j} = \frac{1}{2}\frac{3^j-1}{3^{j-1}}$.

Q 29. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{j\geqslant 0}\sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j}$?

III Probabilités

Dans cette troisième partie, toutes les variables aléatoires considérées sont des variables aléatoires discrètes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

La lettre p désigne un nombre réel de l'intervalle $]0,1[$.

III.A – Un conditionnement

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ suivant la loi géométrique de paramètre p :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X=n) = p(1-p)^{n-1}.$$

Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi conditionnelle de Y sachant $[X=n]$ est la loi de Poisson de paramètre n :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(Y=k \mid X=n) = \mathrm{e}^{-n}\frac{n^k}{k!}.$$

Q 30. Déterminer la loi conjointe de X et Y.

Q 31. Calculer $\mathbb{P}(Y=0)$ et montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(Y=k) = \frac{p}{(1-p)k!} f_k\left(\frac{1-p}{\mathrm{e}}\right),$$

où f_k est la fonction définie en I.B.

Q 32. Vérifier que l'on a bien $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y=k) = 1$.

Q 33. Montrer que Y admet une espérance finie et calculer cette espérance.

Q 34. Montrer que Y admet une variance et calculer cette variance.

III.B – Pile ou face infini

On considère la répétition infinie du lancer d'une pièce dont la probabilité de « faire pile » est p. Pour modéliser cette expérience, on admet que l'on peut définir une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $[X_n = 1]$ désigne l'événement « le n-ième lancer donne pile » et $[X_n = 0]$ désigne l'événement « le n-ième lancer donne face ».

Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit A_n et B_n par

— A_n : « à l'issue des $2n$ premiers lancers, il y a autant de piles que de faces » ;

— B_n : « à l'issue des $2n$ premiers lancers, il y a pour la première fois autant de piles que de faces ».

Par exemple si les six premiers lancers donnent dans l'ordre (face, face, pile, pile, face, pile), A_1 n'est pas réalisé mais A_2 et A_3 le sont, B_2 est réalisé mais B_1 et B_3 ne le sont pas.

Enfin on définit C, « au bout d'un certain nombre (non nul) de lancers, il y a autant de piles que de faces ».

On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A_n et B_n sont des événements, et que C est un événement.

Q 35. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer A_n à l'aide de la variable aléatoire $X_1 + \cdots + X_n$ et en déduire $\mathbb{P}(A_n)$.

Q 36. Montrer que les événements $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont deux à deux incompatibles.

Q 37. Montrer que C est un événement et que $\mathbb{P}(C) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B_n)$.

Q 38. On pose $A_0 = \Omega$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(A_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k)\mathbb{P}(A_{n-k})$.

Q 39. À l'aide notamment de la formule (I.3), montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(B_n) = \frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}\big(p(1-p)\big)^n.$$

Q 40. On suppose que $p \neq \frac{1}{2}$, montrer que $\mathbb{P}(C) = 1 - \sqrt{1-4p(1-p)}$ (on pourra utiliser la formule (I.2)).

Q 41. On suppose que $p = \frac{1}{2}$, montrer que $\mathbb{P}(C) = 1$.

• • • FIN • • •