Mathématiques 1

PSI

2023

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures Calculatrice autorisée

Notations et rappels

Dans tout le problème, n est un entier naturel non nul. On identifie un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et la matrice colonne à n lignes formée de ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. L'élément nul de $\mathbb{R}^n$ est noté $0_{\mathbb{R}^n}$.

L'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et l'ensemble des matrices inversibles d'ordre n est noté $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On désigne par I_n la matrice identité d'ordre n et par 0_n la matrice nulle d'ordre n.

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle image de M, notée $\operatorname{Im} M$ l'image de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M et on appelle noyau de M, noté $\ker M$, le noyau de cet endomorphisme.

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $M^\top$ sa transposée, $\det(M)$ son déterminant, $\mathrm{rg}(M)$ son rang, $\mathrm{tr}(M)$ sa trace, χ_M son polynôme caractéristique et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$ l'ensemble de ses valeurs propres complexes. On rappelle que M et $M^\top$ ont le même rang et le même déterminant.

On note $\mathcal{T}$ la transposition dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'application qui à toute matrice M associe $M^\top$.

Si $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, ..., e'_n)$ sont deux bases de $\mathbb{R}^n$ et si f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, on note $\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ la matrice dont, pour tout entier $j \in [\![1, n]\!]$, la j-ième colonne est formée des coordonnées du vecteur $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Lorsque $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, on simplifie la notation $\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ en $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$ qui désigne la matrice, dans la base $\mathcal{B}$, de l'endomorphisme f. On définit la suite des puissances de f en posant

$$\begin{cases} f^0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}, & \\ \forall k \in \mathbb{N}, & f^{k+1} = f \circ f^k. \end{cases}$$

Si $\Pi = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, on rappelle que $\Pi(f) = \sum_{k=0}^{p} a_k f^k$.

Lorsque $M_1, ..., M_k$ désignent des matrices carrées d'ordres respectifs $n_1, ..., n_k$, on note $\mathrm{diag}(M_1, ..., M_k)$ la matrice carrée d'ordre $n_1 + ... + n_k$, diagonale par blocs, égale à

$$\begin{pmatrix} M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M_k \end{pmatrix}.$$

On dit qu'un endomorphisme Φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

— conserve le rang si $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{rg}\big(\Phi(M)\big) = \mathrm{rg}(M)$;

— conserve le déterminant si $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\det\big(\Phi(M)\big) = \det(M)$;

— conserve la trace si $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}\big(\Phi(M)\big) = \mathrm{tr}(M)$;

— conserve le polynôme caractéristique si $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\chi_{\Phi(M)} = \chi_M$.

L'objectif du problème est de caractériser les endomorphismes réalisant l'une de ces propriétés.

I Résultats préliminaires

I.A – On suppose que $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont trois bases de $\mathbb{R}^n$ et que f et g sont deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$.

Q 1. *Question de cours.* Démontrer que

$$\mathrm{M}_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(g \circ f) = \mathrm{M}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(g)\,\mathrm{M}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f).$$

Q 2. En déduire qu'il existe deux matrices P et Q appartenant à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\mathrm{M}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(f) = P\,\mathrm{M}_{\mathcal{E}}(f)\,Q.$$

I.B – On suppose que M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q 3. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de M et X un vecteur propre associé. Montrer que, pour tout entier naturel k, $M^k X = \lambda^k X$.

Q 4. En déduire que, si $\Pi \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme annulateur de M, alors toute valeur propre complexe de M est une racine dans $\mathbb{C}$ de Π.

II Étude de quelques endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

II.A – Multiplication à gauche par une matrice donnée

L'ensemble des endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est noté $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note Γ_A l'application

$$\Gamma_A : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM \end{array} \right.$$

Q 5. Vérifier que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, Γ_A appartient à $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

Q 6. Démontrer que, si A appartient à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, alors Γ_A conserve le rang.

Q 7. Démontrer que l'application

$$\Gamma : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \\ A & \mapsto & \Gamma_A \end{array} \right.$$

est linéaire et injective.

Dans la suite de cette sous-partie II.A, A est un élément fixé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q 8. Démontrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\Gamma_{A^k} = (\Gamma_A)^k$.

Q 9. En déduire que, pour tout polynôme Π de $\mathbb{R}[X]$, $\Gamma_{\Pi(A)} = \Pi(\Gamma_A)$.

Q 10. À l'aide du résultat précédent, démontrer que A est diagonalisable si et seulement si Γ_A est diagonalisable.

Q 11. Démontrer que χ_A est un polynôme annulateur de Γ_A et que χ_{Γ_A} est un polynôme annulateur de A.

Q 12. En déduire que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\Gamma_A) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$.

II.B – Multiplication à gauche et à droite par des matrices inversibles avec ou sans transposition préalable

Pour toutes matrices P et Q appartenant à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, on considère les applications

$$\Phi_{P,Q} : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & PMQ \end{array} \right.$$

$$\Psi_{P,Q} : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & PM^\top Q \end{array} \right.$$

On admet que $\Phi_{P,Q}$ et $\Psi_{P,Q}$ sont des endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On pose

$$\mathcal{L}_1 = \left\{ \Phi_{P,Q} \mid (P,Q) \in \left(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\right)^2 \right\} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{L}_2 = \left\{ \Psi_{P,Q} \mid (P,Q) \in \left(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\right)^2 \right\}.$$

Q 13. Démontrer que $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ est stable par composition, c'est-à-dire que

$$\forall (\Theta, \Theta') \in (\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2)^2, \qquad \Theta \circ \Theta' \in \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2.$$

II.B.1) Soient P et Q deux matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Q 14. Montrer que $\Phi_{P,Q}$ et $\Psi_{P,Q}$ sont des automorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et préciser leurs applications réciproques.

Q 15. Montrer que $\Phi_{P,Q}$ et $\Psi_{P,Q}$ conservent le rang.

Q 16. Donner une condition nécessaire et suffisante sur P et Q pour que $\Phi_{P,Q}$ et $\Psi_{P,Q}$ conservent le déterminant.

Q 17. Montrer que $\Phi_{P,P^{-1}}$ et $\Psi_{P,P^{-1}}$ conservent le polynôme caractéristique.

II.B.2) Dans cette section, on prend $n \geqslant 2$.

Q 18. Montrer que $\mathcal{T} \in \mathcal{L}_2$ et $\mathcal{T} \notin \mathcal{L}_1$.

Q 19. En déduire que les ensembles $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ sont disjoints.

III Endomorphismes de rang donné

On suppose que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Son noyau est noté $\ker(f)$.

III.A – On suppose dans cette sous-partie que f est un isomorphisme. On se donne une base $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{B}'$ la base

$$\mathcal{B}' = \big(f(e_1), ..., f(e_n)\big).$$

Q 20. Déterminer $\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

III.B – On suppose dans cette sous-partie que f n'est pas l'endomorphisme nul et que $\ker(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.
Soit $\mathcal{B}_2$ une base de $\ker(f)$, que l'on complète (à gauche) en une base $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_k, \mathcal{B}_2)$ de $\mathbb{R}^n$.

Q 21. Montrer que la famille $\big(f(e_1), ..., f(e_k)\big)$ est libre.

Q 22. Justifier que $k < n$.

On complète la famille $\big(f(e_1), ..., f(e_k)\big)$ en une base $\mathcal{B}' = \big(f(e_1), ..., f(e_k), f_{k+1}, ..., f_n\big)$ de $\mathbb{R}^n$.

Q 23. Déterminer $\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

III.C – Dans toute la suite du problème, pour tout entier entier naturel $r \in [\![0, n]\!]$, on note

$$J_{n,r} = \mathrm{diag}(I_r, 0_{n-r})$$

en convenant que $J_{n,n} = I_n$ et $J_{0,n} = 0_n$.
Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang r.

Q 24. Montrer qu'il existe deux matrices P et Q de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$M = \Phi_{P,Q}(J_{n,r}).$$

III.D – On suppose dans cette sous-partie que $n = 2$ et que A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de rang 1.
On suppose que $\mathrm{Im}\, A$ et $\mathrm{Im}\, B$ sont distinctes.

Q 25. Montrer qu'il existe deux matrices P_2 et Q_2 de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telles que

$$A = P_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q_2 \qquad \text{et} \qquad B = P_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} Q_2$$

où α et β sont des réels, non tous deux nuls.

IV Endomorphismes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ conservant le rang

Dans toute cette partie, on suppose que $n = 2$.
On désigne par $\mathcal{B}_{\mathrm{ca}} = (B_1, B_2, B_3, B_4)$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, avec

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

IV.A –

Q 26. Expliciter la matrice de la transposition $\mathcal{T}$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Cette matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ sera notée T.

Q 27. Justifier sans calcul que T est diagonalisable

Q 28. Préciser les valeurs propres et les sous-espaces propres de $\mathcal{T}$.

On se donne deux éléments P et Q de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$,

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad Q = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}.$$

Q 29. Montrer que la matrice, dans la base $\mathcal{B}_{\mathrm{ca}}$, de l'endomorphisme $\Phi_{P,Q}$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} aU & bU \\ cU & dU \end{pmatrix},$$

où U est un élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à déterminer.

On suppose dans la suite de cette partie que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ conservant le rang.

IV.B –

Q 30. Montrer que Φ est un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Q 31. Déterminer les rangs de $\Phi(B_1)$, $\Phi(B_4)$, $\Phi(B_1+B_4)$. En déduire l'existence de deux matrices P_1 et Q_1 de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, telles que :

$$\Phi_{P_1,Q_1}\circ\Phi(B_1)=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\qquad \text{et}\qquad \Phi_{P_1,Q_1}\circ\Phi(B_4)=\begin{pmatrix}0&0\\\alpha&\beta\end{pmatrix}$$

où α et β sont des réels tels que $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$.

On adopte alors les notations suivantes : $\Phi'=\Phi_{P_1,Q_1}\circ\Phi$, $M'=\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{ca}}}(\Phi')$.

Pour tout $j\in\{1,2,3,4\}$, $B'_j=\Phi'(B_j)$ et $C_j=(a_j,b_j,c_j,d_j)^\top$ désigne la j-ième colonne de la matrice M'.

Q 32. Déterminer C_1 et C_4.

Q 33. Démontrer que $\forall i\in\{1,2,3,4\}$, $a_id_i-b_ic_i=0$.

Q 34. En considérant le rang des matrices $B'_1+B'_2$ et $B'_1+B'_3$, démontrer que $d_2=d_3=0$.

On déduit des deux questions précédentes que $b_2c_2=b_3c_3=0$.

IV.C – On suppose dans cette sous-partie que $c_2=0$.

Q 35. En étudiant $\det(M')$, démontrer que les nombres b_2, c_3, d_4 sont tous trois non nuls.

Q 36. En utilisant les résultats de la question précédente et en considérant les rangs des matrices $B'_3+B'_4$, $B'_2+B'_4$ et $B'_1+B'_2+B'_3+B'_4$, démontrer que

$$M'=\begin{pmatrix}1&a_2&0&0\\0&b_2&0&0\\0&0&c_3&c_4\\0&0&0&d_4\end{pmatrix}$$

avec $c_4=a_2c_3$ et $d_4=b_2c_3$.

Q 37. En déduire que Φ appartient à $\mathcal{L}_1$.

IV.D – On suppose à présent que $c_2\neq0$.

Q 38. Démontrer que la matrice, dans la base $\mathcal{B}_{\mathrm{ca}}$, de l'endomorphisme $\Phi'\circ\mathcal{T}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est égale à

$$\begin{pmatrix}1&a_3&a_2&0\\0&b_3&0&0\\0&c_3&c_2&c_4\\0&0&0&d_4\end{pmatrix}.$$

Q 39. Démontrer que $c_3=0$.

Q 40. En déduire que Φ appartient à $\mathcal{L}_2$.

On a ainsi démontré, pour $n=2$, qu'un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ conserve le rang si et seulement s'il appartient à $\mathcal{L}_1\cup\mathcal{L}_2$.

On admet que ce résultat est encore valable lorsque n est un entier strictement supérieur à 2.

V Endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ conservant le déterminant ou le polynôme caractéristique

V.A – On suppose dans cette sous-partie que $n=2$ et que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ conservant le déterminant.

On considère une matrice A non nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $\Phi(A)=0_2$.

Q 41. Montrer que A est de rang 1.

La partie III assure l'existence de deux éléments P et Q de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ tels que

$$A=PJ_{2,1}Q.$$

On pose alors $N=P(I_2-J_{2,1})Q$.

Q 42. En calculant de deux manières différentes $\det(A+N)$, aboutir à une absurdité et conclure que Φ est un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Q 43. En discutant selon les valeurs possibles du rang, démontrer que Φ conserve le rang.

On a ainsi démontré que tout endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui conserve le déterminant conserve le rang. On admet que ce résultat s'étend au cas où n est un entier naturel non nul quelconque.

Q 44. Caractériser les endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui conservent le déterminant.

V.B – On revient au cas général où n est un entier naturel non nul.

V.B.1) Propriétés de la trace

Q 45. Démontrer que l'application

$$\left|\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ M & \mapsto & \operatorname{tr}(M) \end{array}\right.$$

est une forme linéaire vérifiant

$$\forall (A,B) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)^2, \qquad \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA).$$

Q 46. Montrer que l'application

$$\left|\begin{array}{ccc} \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)^2 & \to & \mathbb{R} \\ (A,B) & \mapsto & \operatorname{tr}(A^\top B) \end{array}\right.$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q 47. En déduire que, si une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \qquad \operatorname{tr}(AM) = 0,$$

alors $A = 0$.

V.B.2) Application à la caractérisation des endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ conservant le polynôme caractéristique

Q 48. Démontrer qu'un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui conserve le polynôme caractéristique conserve également le déterminant et la trace.

Q 49. Caractériser les endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui conservent le polynôme caractéristique.

• • • FIN • • •
