Mathématiques 1

MP, MPI

2023

4 heures — Calculatrice autorisée

Sur le calcul ombral

Objectifs

Ce problème introduit le calcul ombral et propose d'en démontrer certains résultats.

Historiquement, ce « calcul » reposait sur un ensemble de manipulations heuristiques sur les indices qui étaient traités comme des puissances. Pour justifier ces règles, une solution consiste à utiliser des endomorphismes agissant sur des polynômes. Ce problème a pour objectif de présenter ces règles et d'en déduire des identités polynomiales non triviales.

Notations

— $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

— $\mathbb{K}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Dans ce problème, on identifie polynômes formels et fonctions polynomiales de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ associées. On identifie de plus les éléments de $\mathbb{K}$ aux polynômes constants.

— Tout polynôme $p \in \mathbb{K}[X]$ s'écrit de manière unique

$$p = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$$

où (a_k) est une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ nulle à partir d'un certain rang. Si p n'est pas le polynôme nul, son degré $\deg(p)$ est le plus grand entier k tel que $a_k \neq 0$. Par convention, le degré du polynôme nul est -1 (cette convention est inhabituelle).

— Si n est un entier naturel, $\mathbb{K}_n[X]$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

— On note $\mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$ l'algèbre des endomorphismes de l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$.

— On note I l'endomorphisme identité de $\mathbb{K}[X]$.

— Les éléments inversibles de l'algèbre $\mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$ sont les endomorphismes bijectifs (automorphismes) de l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$.

— Pour $T \in \mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$ et $p \in \mathbb{K}[X]$, on note $Tp = T(p)$.

— D désigne l'endomorphisme de dérivation sur $\mathbb{K}[X]$: $\forall p \in \mathbb{K}[X]$, $D(p) = Dp = p'$.

— Si T est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$, on définit la suite d'endomorphismes (T^k) par récurrence : $T^0 = I$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $T^{k+1} = T \circ T^k = T^k \circ T$.

I Étude d'endomorphismes de $\mathbb{K}[X]$

I.A – Soit $a \in \mathbb{K}$. Pour tout $p \in \mathbb{K}[X]$, on pose $E_a(p) = E_a p = p(X+a)$.

Q 1. Montrer que E_a est un automorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

I.B – À tout $p \in \mathbb{R}[X]$, on associe la fonction $J(p) = Jp$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad J(p)(x) = Jp(x) = \int_x^{x+1} p(t)\,\mathrm{d}t.$$

Q 2. Montrer que J est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Q 3. Montrer que J conserve le degré et que J est inversible.

I.C – À tout $p \in \mathbb{K}[X]$, on associe la fonction $L(p) = Lp$ de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad L(p)(x) = Lp(x) = -\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} p'(x+t)\,\mathrm{d}t.$$

Q 4. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^k \,\mathrm{d}t$ existe pour tout $k \in \mathbb{N}$ et calculer sa valeur.

Q 5. Montrer que L est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$. Est-il inversible ?

II Formule de Taylor pour les endomorphismes shift-invariants de $\mathbb{K}[X]$

Soit T un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$. On dit que :

— T est *shift-invariant* si, pour tout $a \in \mathbb{K}$, $E_a \circ T = T \circ E_a$;

— T est un *endomorphisme delta* si T est shift-invariant et si l'image du polynôme X par T est une constante non nulle : $TX \in \mathbb{K}^*$.

II.A –

Q 6. Soit $a \in \mathbb{K}$. Vérifier que les endomorphismes I et D sont shift-invariants, ainsi que les endomorphismes E_a, J et L définis dans la partie I. Sont-ils des endomorphismes delta ?

Q 7. Montrer que l'ensemble des endomorphismes shift-invariants de $\mathbb{K}[X]$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$. L'ensemble des endomorphismes delta de $\mathbb{K}[X]$ est-il stable par addition ? par composition ?

II.B –

Q 8. Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. Pour tout polynôme $p \in \mathbb{K}[X]$, montrer que l'expression

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k p$$

a un sens et définit un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.

On note alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k$ l'application de $\mathbb{K}[X]$ qui, à un polynôme $p \in \mathbb{K}[X]$, associe le polynôme $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k p$.

Q 9. Montrer que, pour toute suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k$ est un endomorphisme shift-invariant.

Q 10. Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ des suites d'éléments de $\mathbb{K}$ telles que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k D^k$.
Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = b_k$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit le polynôme $q_n = \dfrac{X^n}{n!}$. On se donne T un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

Q 11. Montrer que T est un endomorphisme shift-invariant si, et seulement si,

$$T = \sum_{k=0}^{+\infty} (Tq_k)(0) D^k.$$

Q 12. Montrer que deux endomorphismes shift-invariants de $\mathbb{K}[X]$ commutent.

II.C – Dans cette sous-partie, on applique le résultat de la question 11 aux endomorphismes de la partie I.

Q 13. Pour tout $p \in \mathbb{K}[X]$ non nul et $a \in \mathbb{K}$, montrer, à l'aide de la question 11, que

$$p(X+a) = \sum_{k=0}^{\deg(p)} \frac{a^k}{k!} p^{(k)}$$

où $p^{(k)}$ désigne la dérivée k-ième du polynôme p. Reconnaitre cette formule.

Q 14. Pour $p \in \mathbb{K}[X]$, exprimer Jp en fonction des dérivées $p^{(k)}$ $(k \in \mathbb{N})$ de p.

Q 15. Démontrer que l'endomophisme $D - I$ est inversible et exprimer L en fonction de $(D-I)^{-1}$.

II.D – Dans cette sous-partie, T est un endomorphisme non nul shift-invariant de $\mathbb{K}[X]$.
On rappelle que le degré du polynôme nul est par convention égal à -1.

Q 16. Montrer qu'il existe un entier naturel $n(T)$ tel que, pour tout polynôme $p \in \mathbb{K}[X]$,

$$\deg(Tp) = \max\{-1, \deg(p) - n(T)\}.$$

Q 17. En déduire $\ker(T)$ en fonction de $n(T)$.

Q 18. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(1) T est inversible ;

(2) $T1 \neq 0$;

(3) $\forall p \in \mathbb{K}[X]$, $\deg(Tp) = \deg(p)$.

Q 19. Si ces conditions sont vérifiées, montrer que T^{-1} est encore un endomorphisme shift-invariant.

II.E – Dans cette sous-partie, T est un endomorphisme delta de $\mathbb{K}[X]$.

Q 20. Montrer qu'il existe une suite de scalaires $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 \neq 0$ et $T = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k D^k$.

Q 21. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme U shift-invariant et inversible tel que $T = D \circ U$. Préciser U dans le cas $T = D$, puis dans le cas $T = L$.

Q 22. Pour tout polynôme $p \in \mathbb{K}[X]$ non nul, vérifier que $\deg(Tp) = \deg(p) - 1$. En déduire $\ker(T)$ et le spectre de T.

Q 23. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note T_n la restriction de T à $\mathbb{K}_n[X]$. Montrer que T_n est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$. Est-il diagonalisable ?

Q 24. Déterminer $\mathrm{Im}(T_n)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$ et en déduire que T est surjectif.

III Suite de polynômes associée à un endomorphisme delta

On souhaite montrer que, pour tout endomorphisme delta Q, il existe une unique suite de polynômes $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}[X]$ telle que

— $q_0 = 1$;
— $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg(q_n) = n$;
— $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $q_n(0) = 0$;
— $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $Qq_n = q_{n-1}$.

Cette suite sera appelée *suite de polynômes associée* à l'endomorphisme delta Q.

III.A – Soit Q un endomorphisme delta.

Q 25. Montrer l'existence et l'unicité de la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes associée à Q.

Q 26. Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$\forall (x,y) \in \mathbb{K}^2, \qquad q_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} q_k(x) q_{n-k}(y).$$

III.B – Réciproquement, soit $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg(q_n) = n$ et

$$\forall (x,y) \in \mathbb{K}^2, \qquad q_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} q_k(x) q_{n-k}(y).$$

Q 27. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme delta Q dont $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de polynômes associée.

III.C – Soit Q un endomorphisme delta, soit $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes associée à Q et soit n un entier naturel.

Q 28. Montrer que la famille $(q_0, q_1, ..., q_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Q 29. D'après la question 23, Q induit un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ noté Q_n. Donner sa matrice dans la base précédente. En déduire sa trace, son déterminant et son polynôme caractéristique.

III.D – Dans cette sous-partie, on détermine la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes associée à certains endomorphismes.

Q 30. Pour $Q = D$, vérifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad q_n = \frac{X^n}{n!}.$$

Q 31. Pour $Q = E_1 - I$, vérifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad q_n = \frac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!}.$$

III.E – Cette sous-partie propose de généraliser la formule de Taylor démontrée dans la partie II. On se donne Q un endomorphisme delta et on note $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes associée à Q.

Q 32. Démontrer que, pour tout $p \in \mathbb{K}[X]$, l'expression $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(Q^k p)(0)q_k$ a un sens et définit un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, puis que

$$p = \sum_{k=0}^{+\infty}(Q^k p)(0)q_k.$$

Q 33. En déduire que, pour tout endomorphisme shift-invariant T, on a

$$T = \sum_{k=0}^{+\infty}(Tq_k)(0)Q^k.$$

III.F –

Q 34. En choisissant $Q = E_1 - I$, démontrer que, si p est un polynôme non constant, alors

$$p'(X) = \sum_{k=1}^{\deg(p)} \frac{1}{k}\left(\sum_{j=0}^{k}(-1)^{j+1}\binom{k}{j}p(X+j)\right).$$

C'est la *formule de dérivation numérique des polynômes.*

IV Un peu de calcul ombral

Si T est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ on définit sa dérivée de Pincherle, notée T', comme l'endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ tel que,

$$\forall p \in \mathbb{K}[X], \qquad T'(p) = T(Xp) - XT(p).$$

IV.A – Soient S et T deux endomorphismes de $\mathbb{K}[X]$.

Q 35. Montrer que, s'il existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de scalaires telle que $T = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}a_k D^k$, alors $T' = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}ka_k D^{k-1}$.

Q 36. Si T est un endomorphisme shift-invariant, montrer que T' est encore un endomorphisme shift-invariant.

Q 37. Si T est un endomorphisme delta, montrer que T' est un endomorphisme shift-invariant et inversible.

Q 38. Vérifier que $(S\circ T)' = S'\circ T + S\circ T'$.

IV.B – Soit Q un endomorphisme delta. On rappelle que d'après la partie II, il existe un unique endomorphisme U shift-invariant et inversible tel que $Q = D\circ U$. On note $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes associée à Q au sens de la partie III.

Q 39. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$(Q'\circ U^{-n-1})(X^n) = X\,U^{-n}(X^{n-1}).$$

Q 40. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$n!q_n(X) = X\,U^{-n}(X^{n-1})$$

puis que

$$nq_n(X) = X(Q')^{-1}(q_{n-1}).$$

IV.C – Dans cette sous-partie, on applique les résultats de la question 40 à l'endomorphisme L étudié dans les parties I et II. On note $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sa suite de polynômes associée au sens de la partie III.

Q 41. Vérifier que, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\ell_n' = \ell_{n-1}' - \ell_{n-1}$$

et

$$X\ell_n'' - X\ell_n' + n\ell_n = 0$$

et

$$\ell_n(X) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n-1}{k-1}\frac{X^k}{k!}.$$

IV.D – Soient Q un endomorphisme delta de suite de polynômes associée notée $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Q 42. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme inversible T tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad Tq_n = \frac{X^n}{n!}.$$

Q 43. Montrer aussi que $D = T \circ Q \circ T^{-1}$.

IV.E – On fixe $\alpha > 0$ et on définit la fonction W de $\mathbb{K}[X]$ par

$$W : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ p & \mapsto & p(\alpha X) \end{array} \right.$$

Q 44. Montrer que W est un automorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

On pose $P = W \circ L \circ W^{-1}$ où L est l'endomorphisme étudié dans les parties I et II.

Q 45. Montrer que

$$P = \frac{1}{\alpha} D \circ \left(\frac{1}{\alpha} D - I \right)^{-1}.$$

Q 46. Montrer ensuite que P est un endomorphisme delta dont la suite de polynômes associée $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad p_n = \ell_n(\alpha X).$$

Q 47. Vérifier que $D = L \circ (L - I)^{-1}$ puis que $P = L \circ \big(\alpha I + (1-\alpha)L\big)^{-1}$.

On note T l'unique automorphisme vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T\ell_n = \dfrac{X^n}{n!}$ et on pose $Q = T \circ P \circ T^{-1}$.

Q 48. Montrer que $Q = D \circ \big(\alpha I + (1-\alpha)D\big)^{-1}$. En déduire que Q est un endomorphisme delta dont la suite de polynômes associée $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad r_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \alpha^k (1-\alpha)^{n-k} \frac{X^k}{k!}.$$

Q 49. Conclure que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \ell_n(\alpha X) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \alpha^k (1-\alpha)^{n-k} \ell_k(X).$$

Les endomorphismes W et T étudiés dans la sous-partie IV.E *sont appelés opérateurs ombraux. Les polynômes (ℓ_n) associés à l'endomorphisme L sont connus sous le nom de polynômes de Laguerre (de paramètre -1). La dernière formule démontrée grâce aux opérateurs ombraux est leur formule de duplication.*

• • • FIN • • •