Concours Commun INP 2022

Épreuve de mathématiques, PSI, quatre heures

PROBLÈME 1
Intégrales de Gauß et théorème de Moivre-Laplace

Présentation
Le théorème de Moivre-Laplace permet d'approcher les calculs de probabilité pour une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $p \in [0,1]$ par des calculs d'intégrales de fonctions gaussiennes. Une première démonstration a été donnée en 1733 par Abraham de Moivre pour le cas où $p = \frac{1}{2}$.
La **partie I** permet d'obtenir un résultat de convergence. La **partie II** aboutit à un calcul exact de fonction gaussienne dite « intégrale de Gauß ». La **partie III** permet d'établir une majoration utile à la **partie IV** qui s'intéresse à la convergence simple d'une suite de fonctions vers une fonction gaussienne. Ce résultat de convergence constitue une étape clé dans une démonstration possible du théorème de Moivre-Laplace.

Partie I – Convergence d'une suite

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$, on pose :

$$a_{k,n} = \frac{\sqrt{2n}}{2^{2n+1}} \binom{2n}{k}.$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_m = \int_0^1 \left(1 - t^2\right)^{\frac{m}{2}} \,\mathrm{d}t.$$

Q 1. Montrer que la suite $(I_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Q 2. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$I_{m+2} = \frac{m+2}{m+3} I_m.$$

Q 3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$I_{2n} = \frac{\sqrt{2n}}{2(2n+1)a_{n,n}}, \quad \text{et :} \quad I_{2n-1} = \frac{\pi}{\sqrt{2n}} a_{n,n}.$$

Q 4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$1 \leqslant \frac{I_{2n-1}}{I_{2n}} \leqslant \frac{I_{2n-2}}{I_{2n}}.$$

En déduire que :

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{2n}} \leqslant 2\pi \left(a_{n,n}\right)^2 \leqslant 1.$$

Q 5. En déduire la convergence de la suite $(a_{n,n})_{n \geqslant 1}$ lorsque n tend l'infini, puis que :

$$I_{2n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}}.$$

Partie II – Calcul d'une intégrale de Gauß

Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on pose :

$$J_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on pose :

$$u_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{t^2}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \sqrt{n}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Enfin, on considère l'intégrale de Gauß :

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2\pi}}.$$

Q 6. À l'aide d'un changement de variable simple, déduire de la **Q 5** que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ converge et donner sa limite.

Q 7. Montrer que la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ et donner sa limite.

Q 8. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $1 + x \leqslant e^x$, et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leqslant u_n(t) \leqslant e^{-t^2}.$$

Q 9. Montrer que l'intégrale K est convergente, puis déduire des questions précédentes une valeur exacte de K.

Partie III – Calcul d'une majoration

Q 10. Montrer qu'il existe une fonction $g : \left[0, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}$ et un réel $M \geqslant 0$, tels que :

$$\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad \frac{1-x}{1+x} = e^{-2x+g(x)}, \qquad \text{et :} \quad |g(x)| \leqslant Mx^3.$$

Q 11. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Montrer que pour tout $k \in [\![n+1, 2n]\!]$:

$$\frac{a_{k,n}}{a_{n,n}} = \frac{\prod\limits_{i=1}^{k-n-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right)}{\prod\limits_{i=1}^{k-n-1} \left(1 + \frac{i}{n}\right)} \times \frac{n}{k}.$$

Q 12. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $n + 1 \leqslant k \leqslant \frac{3n}{2} + 1$, il existe $b_{k,n} \in \mathbb{R}$ tel que : $|b_{k,n}| \leqslant \frac{M}{n^3} (k - n - 1)^4$, et :

$$\frac{a_{k,n}}{a_{n,n}} = \frac{n}{k} e^{b_{k,n}} e^{-\frac{1}{n}(k-n-1)(k-n)}.$$

Partie IV – Vers le théorème de Moivre-Laplace

On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geqslant 1}$ définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \Sigma, \mathrm{P})$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, la variable aléatoire X_n suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(2n, \frac{1}{2}\right)$ et on pose :

$$Z_n = \frac{2X_n - 2n}{\sqrt{2n}}.$$

Pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$, on pose $t_{k,n} = \frac{2k-2n}{\sqrt{2n}}$ et $J_{k,n} = \left[t_{k,n} - \frac{1}{\sqrt{2n}}, t_{k,n} + \frac{1}{\sqrt{2n}}\right[$. On admet que les intervalles $J_{k,n}$, pour $k \in [\![0, 2n]\!]$, sont disjoints deux à deux et que :

$$\left[-\sqrt{2n} - \frac{1}{\sqrt{2n}}, \sqrt{2n} + \frac{1}{\sqrt{2n}}\right[= \bigcup_{k=0}^{2n} J_{k,n}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on définit une fonction $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en escalier de la manière suivante :

$$h_n : t \mapsto \begin{cases} \frac{\sqrt{2n}}{2} \mathrm{P}\left(X_n = k\right) & \text{s'il existe } k \in [\![0, 2n]\!] \text{ tel que } t \in J_{k,n}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Q 13. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de la variable aléatoire Z_n.

Q 14. Proposer une représentation graphique de la fonction h_2.

Q 15. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Vérifier que la fonction h_n possède un maximum sur $\mathbb{R}$ et déterminer pour quelles valeurs ce maximum est atteint.

Q 16. Soit $x \in]0, +\infty[$. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, vérifiant $n \geqslant n_0$, il existe $k_n \in \mathbb{N}$, tel que $x \in J_{k_n,n}$. Vérifier qu'alors :

$$k_n - n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x\sqrt{2n}}{2}\ ,\ t_{k_n,n} \underset{n\to+\infty}{\sim} x\ ,\ k_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n.$$

Q 17. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Vérifier que pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$: $h_n\left(t_{k,n}\right) = a_{k,n}$. Montrer ensuite, en utilisant les résultats des **Q 5**, **Q 12**, **Q 16**, que la suite de fonctions $\left(h_n\right)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et préciser sa limite.

La convergence simple de cette suite de fonctions $\left(h_n\right)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ est une étape importante permettant de démontrer un cas particulier du théorème de Moivre-Laplace :

Théorème
Pour tous réels $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, tels que $a < b$: $$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(a \leqslant Z_n \leqslant b) = \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2\pi}}.$$

PROBLÈME 2
Factorisation QR

Présentation Ce problème s'intéresse dans la **partie I** à des propriétés des matrices de rang 1. Certaines de ces matrices sont ensuite utilisées dans la **partie II** pour construire des matrices orthogonales permettant dans la **partie III** de prouver l'existence d'une factorisation QR pour une matrice carrée quelconque.

Notations

Pour tous n, $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on note $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$. L'ensemble des matrices réelles carrées de taille n est noté $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$: on note également A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui à X associe AX.
Pour tout $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, A^T désigne la matrice transposée de A.
Une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est dite nilpotente s'il existe un entier $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que : $A^k = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})}$.
L'ensemble $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est muni de son produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme associée $\| \cdot \|$. En identifiant $\mathrm{M}_1(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$, on a pour tous $X, Y \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$\langle X, Y \rangle = X^T Y, \quad \text{et :} \quad \|X\|^2 = \langle X, X \rangle.$$

On suppose dans tout ce problème que $n \in \mathbb{N}$ est un entier naturel vérifiant $n \geqslant 2$.

Partie I – Matrices de rang 1

I.1 – Une expression des matrices de rang 1

Q 18. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1. Montrer qu'il existe $X, Y \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$ tels que : $A = XY^T$.

Q 19. Réciproquement, soient $X, Y \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$. Montrer que la matrice XY^T est de rang 1.

I.2 – Quelques propriétés

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.

Q 20. Montrer que $A^2 = \mathrm{tr}(A)A$.

Q 21. En déduire, par récurrence sur k, une expression de A^k en fonction de A pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Q 22. Donner une condition nécessaire et suffisante sur la trace de A pour que A soit nilpotente.

Q 23. Donner une condition nécessaire et suffisante sur la trace de A pour que A soit diagonalisable.

Partie II – Matrices de Householder

II.1 – Un exemple

On définit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}).$$

Q 24. Calculer A^2. En déduire un polynôme annulateur de A.

Q 25. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

Q 26. Montrer que les sous-espaces propres de A sont orthogonaux.

Q 27. Déterminer une matrice $P \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, telles que : $P^T AP = D$.

Q 28. Interpréter géométriquement l'endomorphisme A de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

II.2 – Matrices de Householder

Soit $V \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$. On définit P_V, $Q_V \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$P_V = \frac{1}{\|V\|^2} VV^T, \quad \text{et :} \quad Q_V = \mathrm{I}_n - 2\frac{1}{\|V\|^2} VV^T. \tag{1}$$

Q 29. Montrer que $\mathrm{im}(P_V) = \mathrm{Vect}(V)$ et que $\ker(P_V) = \mathrm{Vect}(V)^\perp$.

Q 30. Montrer que P_V est la projection orthogonale sur la droite $\mathrm{Vect}(V)$.
Préciser le rang et la trace de la matrice P_V.

Q 31. Montrer que Q_V est symétrique et orthogonale.

Q 32. Montrer que Q_V est la symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{Vect}(V)^\perp$.

Partie III – Factorisation QR

III.1 – Un résultat préliminaire

Soient $U, V \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, tels que : $\|U\| = \|V\|$. On note : $D = \mathrm{Vect}(U - V)$.

Q 33. Montrer que $D^\perp$ est l'ensemble des $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, tels que : $\|X - U\| = \|X - V\|$.

Q 34. Donner la décomposition de U sur la somme directe $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = D \oplus D^\perp$.

Q 35. On suppose U et V non colinéaires. Calculer $Q_{U-V}U$ où Q_{U-V} est définie en (1).

Q 36. En déduire que pour tous $\tilde{U}$, $\tilde{V} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il existe une matrice orthogonale Q, telle que $Q\tilde{U}$ soit colinéaire à $\tilde{V}$.

III.2 – Factorisation QR

Q 37. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale Q_1, telle que $Q_1 A$ soit de la forme :

$$Q_1 A = \begin{pmatrix} \alpha & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & C_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } C_1 \in \mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{R}).$$

Q 38. En raisonnant par récurrence sur n, montrer que pour tout $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice Q orthogonale, telle que QA soit triangulaire supérieure.

FIN