ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2021

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Dans ce problème, on propose de définir la notion d'image d'une matrice réelle symétrique par une fonction d'une variable réelle, puis d'étudier quelques propriétés de cette notion (en particulier, relativement à la continuité et à la convexité). Ces notions présentent un intérêt en sciences physiques (statistique ou quantique).

Notations

Dans tout le problème :

— n désigne un entier naturel non nul ;

— si p et q sont des entiers naturels, l'ensemble des entiers k tels que $p \leq k \leq q$ est noté $[\![p, q]\!]$;

— si i et j sont des entiers naturels, alors $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{i,j} = 0$ sinon ;

— B_n désigne l'ensemble des bijections de $[\![1, n]\!]$ dans lui-même ;

— I est un intervalle de $\mathbf{R}$ qui n'est ni vide ni réduit à un singleton ;

— $\mathcal{C}^0(I, \mathbf{R})$ désigne l'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbf{R}$;

— une fonction φ de I dans $\mathbf{R}$ est dite polynomiale s'il existe P un polynôme réel tel que, pour tout $x \in I$, $\varphi(x) = P(x)$;

— $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ (respectivement $D_n(\mathbf{R})$, resp. $S_n(\mathbf{R})$, resp. $O_n(\mathbf{R})$), désigne l'ensemble des matrices carrées (resp. diagonales, resp. symétriques, resp. orthogonales) d'ordre n à coefficients réels, et on confond un élément de $\mathcal{M}_1(\mathbf{R})$ avec son unique coefficient ;

— on note Tr l'application trace définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$;

— si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on note ${}^tM$ sa transposée, on note $\mathrm{Sp}(M)$ son spectre réel, et si $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $[M]_{i,j}$ est le coefficient de M situé à la i-ème ligne et j-ème colonne ;

— on munit $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de sa norme infinie, notée $||\cdot||$ et définie par :

$$\forall\, M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}), \quad ||M|| = \max\left\{|[M]_{i,j}|\,, 1 \leq i, j \leq n\right\} \;;$$

— $S_n(I)$ désigne l'ensemble des matrices de $S_n(\mathbf{R})$ dont le spectre réel est inclus dans I ;

— si $u = (u_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbf{R}^n$, on dit que ce n-uplet est croissant si pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$(i \leq j) \Longrightarrow (u_i \leq u_j)\ ;$$

— si $i_0 \in [\![1,n]\!]$, on appelle nombre d'occurrences de u_{i_0} dans u le cardinal de l'ensemble $\{i \in [\![1,n]\!]\ ;\ u_i = u_{i_0}\}$;

— enfin $\mathrm{Diag}\big((u_i)_{1\leq i\leq n}\big)$ désigne l'élément D de $D_n(\mathbf{R})$ tel que :

$$\forall\, i \in [\![1,n]\!]\,,\ [D]_{i,i} = u_i$$

on pourra noter cet élément en extension $D = \mathrm{Diag}(u_1, \ldots, u_n)$.

Matrices de permutations

Le but de cette partie est d'étudier l'action sur les matrices diagonales de la conjugaison par des matrices de permutations. On considère l'application ω de B_n dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ définie par :

$$\forall\, \sigma \in B_n,\, \forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2\,,\ [\omega(\sigma)]_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)}.$$

1 ▷ Démontrer que pour tout $(\sigma, \sigma') \in B_n^2$, $\omega(\sigma \circ \sigma') = \omega(\sigma)\,\omega(\sigma')$.

2 ▷ Démontrer que $\omega(B_n) \subset O_n(\mathbf{R})$.

3 ▷ Soit $\sigma \in B_n$ et $(d_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbf{R}^n$. Vérifier que :

$$\mathrm{Diag}\big((d_i)_{1\leq i\leq n}\big)\,\omega(\sigma) = \omega(\sigma)\,\mathrm{Diag}\big((d_{\sigma(i)})_{1\leq i\leq n}\big).$$

4 ▷ En déduire l'équivalence suivante concernant deux éléments D et D' de $D_n(\mathbf{R})$,

i) D et D' ont le même ensemble de coefficients diagonaux, chacun ayant le même nombre d'occurrences dans D et D'.

ii) il existe $M \in \omega(B_n)$ telle que $D' = {}^tMDM$.

Fonctions de matrices symétriques

Cette partie a pour objectif de définir une correspondance entre l'espace des fonctions de I dans $\mathbf{R}$ et l'espace des fonctions de $S_n(I)$ dans $S_n(\mathbf{R})$, puis d'en démontrer quelques propriétés. Dans cette partie, f est une fonction de I dans $\mathbf{R}$.

5 ▷ Soit $S \in S_n(I)$. Justifier l'existence de $\Omega \in O_n(\mathbf{R})$ et de $(s_i)_{1\leq i\leq n} \in I^n$ tels que :

$$S = {}^t\Omega \operatorname{Diag}\big((s_i)_{1\leq i\leq n}\big)\, \Omega.$$

6 ▷ Pour tout $(s_i)_{1\leq i\leq n} \in I^n$, justifier l'existence d'un élément P de $\mathbf{R}[X]$ tel que :

$$\forall\, i \in [\![1, n]\!]\,,\ P(s_i) = f(s_i).$$

Soit $S \in S_n(I)$. On suppose que l'on dispose des deux écritures :

$$S = {}^t\Omega \operatorname{Diag}\big((s_i)_{1\leq i\leq n}\big)\, \Omega \quad \text{et} \quad S = {}^t\Omega' \operatorname{Diag}\big((s'_i)_{1\leq i\leq n}\big)\, \Omega',$$

avec Ω, $\Omega' \in O_n(\mathbf{R})$ et $(s_i)_{1\leq i\leq n}$, $(s'_i)_{1\leq i\leq n} \in I^n$.

7 ▷ Montrer que l'on a alors :

$${}^t\Omega' \operatorname{Diag}\Big(\big(f(s'_i)\big)_{1\leq i\leq n}\Big)\, \Omega' = {}^t\Omega \operatorname{Diag}\Big(\big(f(s_i)\big)_{1\leq i\leq n}\Big)\, \Omega,$$

puis que ${}^t\Omega \operatorname{Diag}\Big(\big(f(s_i)\big)_{1\leq i\leq n}\Big)\, \Omega \in S_n(\mathbf{R})$.

Dans la suite du problème, on note u l'application qui, à toute fonction φ de I dans $\mathbf{R}$, associe $u(\varphi)$ la fonction de $S_n(I)$ dans $S_n(\mathbf{R})$ définie par :

$$\forall\, S \in S_n(I),\ u(\varphi)(S) = {}^t\Omega \operatorname{Diag}\Big(\big(\varphi(s_i)\big)_{1\leq i\leq n}\Big)\, \Omega,$$

où $S = {}^t\Omega \operatorname{Diag}\big((s_i)_{1\leq i\leq n}\big)\, \Omega$, avec $\Omega \in O_n(\mathbf{R})$ et $(s_i)_{1\leq i\leq n} \in I^n$.

Cette fonction est bien définie puisque, d'après la question précédente, $u(\varphi)(S)$ ne dépend pas du choix des matrices $\Omega \in O_n(\mathbf{R})$ et $D = \operatorname{Diag}\big((s_i)_{1\leq i\leq n}\big)$ avec $(s_i)_{1\leq i\leq n} \in I^n$, tel que $S = {}^t\Omega D \Omega$.

Enfin, on désigne par v l'application $\operatorname{Tr} \circ u$.

8 ▷ Vérifier que u et v sont linéaires, puis calculer, pour toute fonction φ de I dans $\mathbf{R}$ et pour tout $x \in I$, $u(\varphi)(xI_n)$.

9 ▷ Étudier l'injectivité et la surjectivité de u.

10 ▷ On suppose que f est polynomiale ; montrer qu'il existe $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que pour tout $S \in S_n(I)$, $u(f)(S) = P(S)$.

Réciproquement, est-il vrai que, s'il existe $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que pour tout $S \in S_n(I)$, $u(f)(S) = P(S)$, alors f est polynomiale ?

11 ▷ Démontrer que, si $(\varphi_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est une suite de fonctions de I dans $\mathbf{R}$ qui converge simplement sur I vers une fonction φ, alors les suites $\big(u(\varphi_k)\big)_{k\in\mathbf{N}}$ et $\big(v(\varphi_k)\big)_{k\in\mathbf{N}}$ convergent simplement sur $S_n(I)$.

Y a-t-il convergence uniforme sur $S_n(I)$ si l'on suppose que $(\varphi_k)_{k\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur I ?

Norme et convexité

L'objectif de cette partie est de munir $S_n(\mathbf{R})$ d'une nouvelle norme qui permettra de compléter l'étude des fonctions de matrices symétriques.

12 ▷ On note $\Sigma = \Big\{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})\,;\ {}^tX\,X = 1\Big\}$. Démontrer que si $S \in S_n(\mathbf{R})$ on a :

$$\min\big(\mathrm{Sp}(S)\big) = \min\left\{\,{}^tX\,S\,X\,;\ X \in \Sigma\right\} \text{ et } \max\big(\mathrm{Sp}(S)\big) = \max\left\{\,{}^tX\,S\,X\,;\ X \in \Sigma\right\}.$$

13 ▷ Montrer finalement que $S_n(I)$ est une partie convexe de $S_n(\mathbf{R})$ et que l'application ρ, de $S_n(\mathbf{R})$ dans $\mathbf{R}$, qui à toute matrice $M \in S_n(\mathbf{R})$ associe

$$\max\left\{\,|\lambda|\ ;\ \lambda \in \mathrm{Sp}(M)\right\},$$

est une norme sur $S_n(\mathbf{R})$.

Continuité des fonctions de matrices symétriques

Dans cette partie, à l'aide de la norme précédemment introduite, on démontre quelques résultats relatifs à la continuité des fonctions de matrices symétriques. On suppose désormais $S_n(\mathbf{R})$ muni de la norme ρ et on appelle χ l'application de $S_n(\mathbf{R})$ dans $\mathbf{R}[X]$ qui, à tout élément de $S_n(\mathbf{R})$, associe son polynôme caractéristique.

On définit aussi l'application, notée $\mathrm{Sp}_\uparrow$, qui à toute matrice $S \in S_n(\mathbf{R})$, associe son spectre croissant (c'est-à-dire le n-uplet croissant des valeurs propres de S dans lequel le nombre d'occurrences de chaque valeur propre coïncide avec son ordre de multiplicité).

14 ▷ Démontrer que χ est continue.

On souhaite maintenant prouver que $\mathrm{Sp}_\uparrow$ est continue. À cet effet, on introduit un élément M de $S_n(\mathbf{R})$ et une suite $(M_k)_{k\in\mathbf{N}}$ à valeurs dans $S_n(\mathbf{R})$ qui converge vers M. Si $k \in \mathbf{N}$, on note $\Lambda_k = \mathrm{Sp}_\uparrow(M_k)$.

15 ▷ Démontrer que la suite $(\Lambda_k)_{k\in\mathbf{N}}$ admet une valeur d'adhérence croissante.

16 ▷ Montrer que, si α est une application strictement croissante de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ telle que la suite $(\Lambda_{\alpha(k)})_{k\in\mathbf{N}}$ converge, alors : $\Lambda_{\alpha(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathrm{Sp}_{\uparrow}(M)$.

17 ▷ En déduire que $\mathrm{Sp}_{\uparrow}$ est continue.

18 ▷ Démontrer que $O_n(\mathbf{R})$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

19 ▷ Démontrer que, si $\varphi \in \mathcal{C}^0(I, \mathbf{R})$, alors $u(\varphi)$ et $v(\varphi)$ sont continues.

Convexité des fonctions de matrices symétriques

On démontre maintenant quelques résultats relatifs à la convexité des fonctions de matrices symétriques. Dans cette partie, f est une fonction de I dans $\mathbf{R}$.

20 ▷ On suppose ici que f est convexe sur I et que $S \in S_n(I)$. On note

$$\mathcal{U}_S = \left\{ {}^t\Omega\, S\, \Omega \,;\, \Omega \in O_n(\mathbf{R}) \right\}.$$

Justifier que pour tout $U \in \mathcal{U}_S$, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $[U]_{k,k} \in I$.

Démontrer alors que :

$$\max\left\{ \sum_{k=1}^{n} f\left([U]_{k,k}\right) ;\, U \in \mathcal{U}_S \right\} = v(f)(S).$$

21 ▷ En déduire que, si f est convexe sur I, pour tout $(A, B) \in S_n(I)^2$, pour tout $t \in [0, 1]$, on a :

$$v(f)\big((1-t)\,A + t\,B\big) \leq (1-t)\,v(f)(A) + t\,v(f)(B).$$

On dit qu'une fonction ψ de $S_n(I)$ dans $\mathbf{R}$ est convexe sur $S_n(I)$ si elle vérifie la relation :

$$\forall\,(A, B) \in S_n(I)^2,\ \forall\, t \in [0, 1], \quad \psi\big((1-t)A + tB\big) \leq (1-t)\psi(A) + t\psi(B).$$

22 ▷ Démontrer finalement que la fonction $v(f)$ est convexe sur $S_n(I)$ si, et seulement si, f est convexe sur I.

Fin du problème