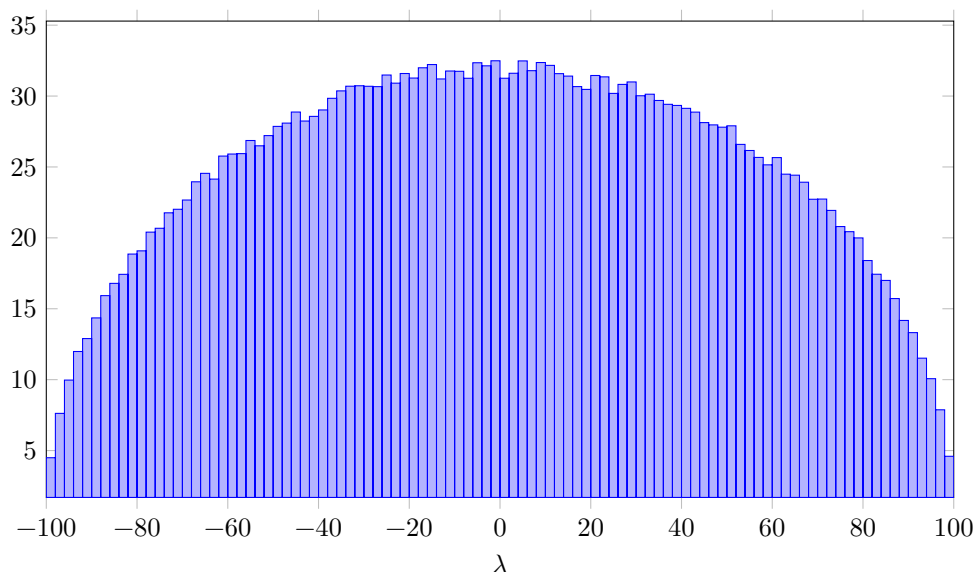
*La loi du demi-cercle***Notations**

- Pour tous entiers naturels p et q tels que $p \leq q$ on note $\llbracket p, q \rrbracket$ l'ensemble $\{i \in \mathbb{N} \mid p \leq i \leq q\}$.
- Pour tout entier naturel n tel que $n \geq 1$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et n colonnes à coefficients réels, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques et à coefficients réels de taille n et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles orthogonales de taille n .
- Pour toute matrice symétrique réelle $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ on note $\lambda_1(M) \geq \lambda_2(M) \geq \dots \geq \lambda_n(M)$ ses valeurs propres rangées dans l'ordre décroissant.
- On note $M^\top$ la transposée d'une matrice M .
- Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on note E_{ij} la matrice de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé sur la i -ème ligne et la j -ième colonne qui vaut 1.
- Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\|M\|_F = \sqrt{\text{tr}(MM^\top)}$ sa norme euclidienne canonique.
- Dans tout le problème, on note $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur Ω .
- Étant donnée une variable aléatoire discrète X à valeurs réelles admettant une espérance, on note $\mathbb{E}(X)$ son espérance. Si X admet une variance, on note $\mathbb{V}(X)$ sa variance.

Problématique

En essayant d'expliquer la répartition des niveaux d'énergie des noyaux des atomes lourds, Eugene Wigner a été amené, dans les années 1950, à étudier le spectre de matrices symétriques réelles aléatoires de grande taille. La figure 1 montre un histogramme qui représente la répartition des valeurs propres d'une matrice symétrique réelle de taille $n = 2500$ constituée de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, d'espérance nulle et de variance égale à 1.

**Figure 1**

On voit que les valeurs propres se répartissent suivant un profil en demi-cercle de rayon $2\sqrt{n}$. En normalisant par un facteur $1/\sqrt{n}$ on obtient le profil d'un demi-cercle de rayon 2.

Plus précisément, on considère $(X_{ij})_{(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ une famille de variables aléatoires discrètes réelles telles que

- pour tout $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $X_{ij} = X_{ji}$;
- les variables aléatoires X_{ij} sont de même loi, d'espérance nulle et de variance 1 ;
- pour $n \geq 1$, les variables aléatoires X_{ij} , pour $1 \leq i \leq j \leq n$, sont mutuellement indépendantes.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $\omega \in \Omega$, on note $M_n(\omega)$ la matrice $(X_{ij}(\omega))_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $\Lambda_{1,n}(\omega) \geq \dots \geq \Lambda_{n,n}(\omega)$ les valeurs propres de $\frac{1}{\sqrt{n}} M_n(\omega)$.

On définit ainsi, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, des variables aléatoires réelles discrètes $\Lambda_{i,n}$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On se propose de montrer le résultat suivant :

—— **Loi du demi-cercle** ———

Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continue et bornée,

$$\mathbb{E} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\Lambda_{i,n}) \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^2 f(x) \sqrt{4-x^2} dx.$$

Dans la partie I, on établit une inégalité portant sur les valeurs propres d'un couple de matrices symétriques. La partie II est consacrée à la résolution d'un problème de dénombrement qui est utilisée dans la partie III où la loi du demi-cercle est démontrée pour des variables aléatoires uniformément bornées. Dans la partie IV, on établit la loi du demi-cercle dans le cas général en utilisant les résultats des parties I et III.

I Inégalité de Hoffman-Wielandt

I.A — Soient A et B deux matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Q 1. Montrer que, pour tout M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tous P et Q dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, on a $\|PMQ\|_F = \|M\|_F$.

Q 2. On note $D_A = \text{diag}(\lambda_1(A), \dots, \lambda_n(A))$ et $D_B = \text{diag}(\lambda_1(B), \dots, \lambda_n(B))$. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale $P = (p_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ telle que $\|A - B\|_F^2 = \|D_A P - P D_B\|_F^2$.

Q 3. Montrer que

$$\|A - B\|_F^2 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} p_{i,j}^2 (\lambda_i(A) - \lambda_j(B))^2.$$

I.B — On note $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices *bistochastiques* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices $M = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ dont tous les coefficients sont positifs ou nuls et tels que $\sum_{j=1}^n m_{i,j} = \sum_{j=1}^n m_{j,i} = 1$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

On note $f : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow \\ M & \mapsto \sum_{1 \leq i, j \leq n} m_{i,j} (\lambda_i(A) - \lambda_j(B))^2. \end{cases} \mathbb{R}$

Q 4. Justifier que f admet un minimum sur $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$.

On se propose de montrer que ce minimum est atteint en la matrice identité.

Q 5. Soit $(i, j, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^3$ tel que $j \geq i$ et $k \geq i$. Montrer que, pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour $x \in \mathbb{R}^+$,

$$f(M + xE_{ii} + xE_{jk} - xE_{ik} - xE_{ji}) - f(M) = 2x(\lambda_i(A) - \lambda_j(A))(\lambda_k(B) - \lambda_i(B)) \leq 0$$

Q 6. Soient $n \geq 2$ et $M = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ une matrice différente de l'identité. On note i le plus petit entier appartenant à $\llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $m_{i,i} \neq 1$. Montrer qu'il existe une matrice $M' = (m'_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ telle que $f(M') \leq f(M)$ et $m'_{j,j} = 1$ pour tout $j \in \llbracket 1, i \rrbracket$.

Q 7. En déduire que

$$\min\{f(M) \mid M \in \mathcal{B}_n(\mathbb{R})\} = f(I_n).$$

I.C –

Q 8. En déduire que

$$\forall (A, B) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^2, \quad \sum_{i=1}^n (\lambda_i(A) - \lambda_i(B))^2 \leq \|A - B\|_F^2.$$

II Dénombrement des mots bien parenthésés

Dans cette partie, on s'intéresse à des chaînes de caractères constituées uniquement des deux caractères parenthèse ouvrante et parenthèse fermante. On dit qu'un mot est *bien parenthésé* s'il commence par une parenthèse ouvrante et qu'à toute parenthèse ouvrante est associée une (unique) parenthèse fermante *qui lui est postérieure*. Par exemple le mot

$() (())$

est bien parenthésé. En revanche, le mot

$()) ()$

n'est pas bien parenthésé. Un mot bien parenthésé est ainsi forcément constitué d'un nombre pair de caractères, chaque parenthèse qui s'ouvre doit se refermer.

Pour tout entier $n \geq 1$, on note C_n le nombre de mots bien parenthésés de longueur $2n$. On pose par commodité $C_0 = 1$.

II.A –

Q 9. En énumérant les différents mots bien parenthésés de longueur 2, 4 et 6, montrer que $C_1 = 1$, $C_2 = 2$ et déterminer C_3 .

Q 10. Montrer que, pour tout entier naturel n , $C_n \leq 2^{2n}$. Que peut-on en déduire pour le rayon de convergence de la série entière $\sum C_k x^k$?

Q 11. Montrer par un raisonnement combinatoire que, pour tout entier $k \geq 1$,

$$C_k = \sum_{i=0}^{k-1} C_i C_{k-i-1}.$$

On peut remarquer qu'un mot bien parenthésé est forcément de la forme $(m)m'$ avec m et m' deux mots bien parenthésés, éventuellement vides.

II.B – Pour tout $x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$, on pose $F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} C_k x^k$.

Q 12. Montrer que, pour tout $x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$, $F(x) = 1 + x(F(x))^2$.

Q 13. Montrer que la fonction $f : \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2xF(x) - 1$ ne s'annule pas.

Q 14. Déterminer, pour tout $x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$, une expression de $F(x)$ en fonction de x .

Q 15. Déterminer le développement en série entière de la fonction $u \mapsto \sqrt{1-u}$. On écrira les coefficients sous la forme d'un quotient de factorielles et de puissances de 2.

Q 16. Montrer que, pour tout entier naturel n ,

$$C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}.$$

III Loi du demi-cercle, cas uniformément borné

On suppose, uniquement dans cette partie, que les variables aléatoires X_{ij} sont uniformément bornées :

$$\exists K \in \mathbb{R} \quad \forall (i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2 \quad |X_{ij}| \leq K.$$

III.A – Pour tout entier naturel k on pose

$$m_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^2 x^k \sqrt{4 - x^2} \, dx.$$

Q 17. Pour $k \in \mathbb{N}$, que vaut m_{2k+1} ?

Q 18. En utilisant le changement de variable $x = 2 \sin t$, calculer m_0 .

Q 19. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout entier naturel k ,

$$m_{2k+2} = \frac{2(2k+1)}{k+2} m_{2k}.$$

Q 20. En déduire que

$$m_k = \begin{cases} C_{k/2} & \text{si } k \text{ est pair,} \\ 0 & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

III.B – Soit k un entier naturel. On se propose de montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Lambda_{i,n}^k \right) = m_k,$$

où $\Lambda_{i,n}^k = (\Lambda_{i,n})^k$ est la puissance k -ième de $\Lambda_{i,n}$.

Q 21. Justifier que la variable aléatoire $\sum_{i=1}^n \Lambda_{i,n}^k$ admet une espérance et que

$$\mathbb{E} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Lambda_{i,n}^k \right) = \frac{1}{n^{1+k/2}} \mathbb{E}(\text{tr}(M_n^k)) = \frac{1}{n^{1+k/2}} \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^k} \mathbb{E}(X_{i_1 i_2} X_{i_2 i_3} \cdots X_{i_{k-1} i_k} X_{i_k i_1}).$$

On appelle *cycle* de longueur k à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, tout $(k+1)$ -uplet $\vec{i} = (i_1, i_2, \dots, i_k, i_1)$ d'éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Les éléments $i_1, \dots, i_k$ sont appelés *sommets* du cycle $\vec{i}$. On dit aussi que le cycle *passse* par ces sommets. On note $|\vec{i}|$ le nombre de sommets distincts du cycle $\vec{i}$.

On appelle *arêtes* du cycle $(i_1, i_2, \dots, i_k, i_1)$ les couples non ordonnés (l'ordre des deux éléments de chaque couple n'est pas significatif) $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_k, i_1)$.

Par exemple $\vec{i} = (1, 3, 5, 3, 2, 2, 1)$ est un cycle de longueur 6 dans $\llbracket 1, 5 \rrbracket$. Les sommets de ce cycle sont les éléments 1, 2, 3 et 5, donc $|\vec{i}| = 4$. Les arêtes distinctes de ce cycle sont $(1, 3), (3, 5), (3, 2), (2, 2)$ et $(2, 1)$. Les arêtes $(3, 5)$ et $(5, 3)$ sont les mêmes.

Q 22. Montrer que le nombre de cycles de longueur k dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ passant par ℓ sommets distincts est inférieur ou égal à $n^\ell \ell^k$.

Q 23. En déduire que

$$\frac{1}{n^{1+k/2}} \sum_{\substack{\vec{i} \in \llbracket 1, n \rrbracket^k \\ |\vec{i}| \leq (k+1)/2}} |\mathbb{E}(X_{i_1 i_2} X_{i_2 i_3} \cdots X_{i_{k-1} i_k} X_{i_k i_1})| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On classe les cycles de longueur k en trois sous-ensembles :

- l'ensemble $\mathcal{A}_k$, constitué des cycles où au moins une arête n'apparaît qu'une fois ;
- l'ensemble $\mathcal{B}_k$, constitué des cycles où toutes les arêtes apparaissent exactement deux fois ;
- l'ensemble $\mathcal{C}_k$, constitué des cycles où toutes les arêtes apparaissent au moins deux fois et il en existe au moins une qui apparaît au moins trois fois.

Q 24. Montrer que, si le cycle $(i_1, i_2, \dots, i_k, i_1)$ appartient à $\mathcal{A}_k$, alors

$$\mathbb{E}(X_{i_1 i_2} X_{i_2 i_3} \dots X_{i_{k-1} i_k} X_{i_k i_1}) = 0.$$

Q 25. Montrer que, pour tout cycle $\vec{i}$ appartenant à $\mathcal{C}_k$, $|\vec{i}| \leq \frac{k+1}{2}$.

Q 26. Que peut-on dire de $\mathcal{B}_k$ si k est impair ? En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Lambda_{i,n}^k \right) = 0$ dans ce cas.

On suppose dans la suite que k est pair et que $\vec{i} \in \mathcal{B}_k$ est un cycle passant par $\frac{k}{2} + 1$ sommets distincts. Autrement dit $|\vec{i}| = \frac{k}{2} + 1$.

On parcourt les arêtes de $\vec{i}$ dans l'ordre. À chaque arête de $\vec{i}$ on associe une parenthèse ouvrante si cette arête apparaît pour la première fois et une parenthèse fermante si elle apparaît pour la deuxième fois. Par exemple, au cycle $(1, 3, 2, 3, 1)$ correspond $(())$, au cycle $(1, 2, 1, 3, 1)$ correspond $(())$.

Q 27. Justifier que l'on obtient ainsi un mot bien parenthésé de longueur k .

Q 28. Dénombrer les cycles $\vec{i}$ qui correspondent à un mot bien parenthésé fixé.

Q 29. Déduire de ce qui précède que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Lambda_{i,n}^k \right) = C_{k/2}.$$

III.C –

Q 30. En déduire que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P(\Lambda_{i,n}) \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^2 P(x) \sqrt{4-x^2} dx.$$

III.D – Soit $A > 2$.

Q 31. Montrer que, pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$,

$$\mathbb{E} \left(\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ |\Lambda_{i,n}| \geq A}} |\Lambda_{i,n}|^p \right) \leq \frac{1}{A^{p+2q}} \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^n |\Lambda_{i,n}|^{2(p+q)} \right).$$

Q 32. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \mathbb{E} \left(\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ |\Lambda_{i,n}| \geq A}} |\Lambda_{i,n}|^p \right) = 0.$$

Q 33. Soient f une fonction continue et bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et P un polynôme de degré p . Justifier qu'il existe une constante K telle que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus]-A, A[, \quad |f(x) - P(x)| \leq K |x|^p.$$

Q 34. En déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \mathbb{E} \left(\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ |\Lambda_{i,n}| \geq A}} |f - P|(\Lambda_{i,n}) \right) = 0.$$

III.E –

Q 35. Soit f une fonction continue et bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\Lambda_{i,n}) \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^2 f(x) \sqrt{4-x^2} dx.$$

IV Loi du demi-cercle, cas général

On revient au cas général. On note $\mathbb{1}_A$ la variable aléatoire indicatrice d'un événement A .

Pour tout $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et pour tout $C > 0$, on pose

$$\sigma_{ij}(C) = \sqrt{\mathbb{V}(X_{ij} \mathbb{1}_{|X_{ij}| \leq C})}.$$

Si $\sigma_{ij}(C) \neq 0$, on pose

$$\widehat{X}_{ij}(C) = \frac{1}{\sigma_{ij}(C)} (X_{ij} \mathbb{1}_{|X_{ij}| \leq C} - \mathbb{E}(X_{ij} \mathbb{1}_{|X_{ij}| \leq C})).$$

IV.A –

Q 36. Soit X une variable aléatoire discrète d'espérance finie. Montrer que

$$\mathbb{E}(X \mathbb{1}_{|X| \leq C}) \xrightarrow{C \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X).$$

Q 37. En déduire que

$$\lim_{C \rightarrow +\infty} \sigma_{ij}(C) = 1.$$

Q 38. Justifier que, pour C assez grand, les variables $\widehat{X}_{ij}(C)$ sont bien définies et qu'elles sont alors bornées, centrées, de variance 1 et qu'elles sont mutuellement indépendantes pour $1 \leq i \leq j$.

Q 39. Montrer que

$$X_{ij} - \widehat{X}_{ij}(C) = \left(1 - \frac{1}{\sigma_{ij}(C)}\right) X_{ij} + \frac{1}{\sigma_{ij}(C)} (X_{ij} \mathbb{1}_{|X_{ij}| > C} - \mathbb{E}(X_{ij} \mathbb{1}_{|X_{ij}| > C})).$$

Q 40. Montrer que

$$\lim_{C \rightarrow +\infty} \mathbb{E}((X_{ij} - \widehat{X}_{ij}(C))^2) = 0.$$

IV.B – Pour tout entier n tel que $n \geq 1$, on note $\widehat{M}_n(C) = (\widehat{X}_{ij}(C))_{1 \leq i, j \leq n}$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $\widehat{\Lambda}_{1,n}(\omega) \geq \dots \geq \widehat{\Lambda}_{n,n}(\omega)$ les valeurs propres de $\frac{1}{\sqrt{n}} \widehat{M}_n(C)(\omega)$ rangées dans l'ordre décroissant.

On obtient ainsi des variables aléatoires réelles discrètes $\widehat{\Lambda}_{1,n}, \dots, \widehat{\Lambda}_{n,n}$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction K -lipschitzienne.

Q 41. Montrer que

$$\left| \mathbb{E} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\Lambda_{i,n}) \right) - \mathbb{E} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\widehat{\Lambda}_{i,n}) \right) \right| \leq \frac{K}{n} \mathbb{E}(\|M_n - \widehat{M}_n(C)\|_F).$$

Q 42. On suppose de plus f bornée. Montrer

$$\mathbb{E} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\Lambda_{i,n}) \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^2 f(x) \sqrt{4-x^2} dx.$$

IV.C –

Q 43. Montrer la loi du demi-cercle dans le cas général.

• • • FIN • • •