CONCOURS COMMUN INP

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PSI

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé d'un exercice et de deux problèmes indépendants.

EXERCICE
Étude d'extremums

On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}^2$ par : $\forall(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

L'objectif de cet exercice est d'étudier l'existence d'extremums pour f.

Q1. Déterminer les points critiques de f.

Q2. Expliciter des points $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ arbitrairement proches de $(0, 0)$, tels que $f(x, y) < 0$.
Expliciter de même des points $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ arbitrairement proches de $(0, 0)$, tels que $f(x, y) > 0$.
La fonction f admet-elle en $(0, 0)$ un maximum local, un minimum local ou aucun des deux ?

On considère la fonction g définie sur $\mathbf{R}^2$ par : $\forall(u, v) \in \mathbf{R}^2,\ g(u, v) = f(1 + u, 1 + v) - f(1, 1)$.

Q3. Calculer, pour tout $(u, v) \in \mathbf{R}^2$, $g(u, v)$ puis, pour tout $(r, \theta) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$, $g(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

Q4. Prouver que pour tout $(r, \theta) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$, on a : $g(r\cos\theta, r\sin\theta) \geq 3r^2\left(\dfrac{1}{2} - 2r\right)$.
Que peut-on en conclure ?

Q5. La fonction f possède-t'elle un ou des extremums globaux ?

PROBLÈME 1
Étude d'une famille de séries entières

Dans tout le problème, α désigne un nombre réel. On note $\mathcal{D}_\alpha$ l'ensemble des réels x pour lesquels la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^\alpha}$ est convergente et on pose, pour tout $x \in \mathcal{D}_\alpha$:

$$f_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}.$$

Objectifs

Ce problème est composé de trois **parties** indépendantes.

Dans la **Partie I**, on étudie quelques propriétés élémentaires des fonctions f_α.

L'objectif de la **Partie II** est de construire un logarithme complexe.

Enfin, la **Partie III** permet d'obtenir un équivalent de $f_\alpha(x)$ lorsque x tend vers 1, dans le cas $\alpha \in]0, 1[$.

Partie I - Quelques propriétés des fonctions f_α

Q6. Déterminer le rayon de convergence R commun aux séries entières définissant les fonctions f_α.

Q7. Déterminer, suivant les valeurs du réel α, le domaine de définition $\mathcal{D}_\alpha$ de la fonction f_α. *On distinguera les cas* $\alpha \in]-\infty, 0]$, $\alpha \in]0, 1]$ *et* $\alpha \in]1, +\infty[$.

Q8. On suppose dans cette question $\alpha > 0$. Déterminer, pour tout $x \in \mathcal{D}_\alpha$, le signe de $f_\alpha(x)$.

Q9. Expliciter f_0, f_{-1} et f_1.

Q10. Soit $\alpha > 1$. Prouver que f_α est continue sur $\mathcal{D}_\alpha$.

Q11. Soit $\alpha \leq 1$. Prouver que $\lim_{x\to 1^-} f_\alpha(x) = +\infty$. *On pourra comparer* f_α *à* f_1.

On suppose dans les deux prochaines questions qu'il existe un réel $\lambda \geq 0$ et une variable aléatoire X_α, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbf{N}^*$, tels que la fonction génératrice G_α de X_α soit :

$$G_\alpha = \lambda f_\alpha.$$

Q12. Montrer que $\alpha > 1$ et $\lambda = \dfrac{1}{f_\alpha(1)}$.

Q13. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la variable aléatoire X_α admette une espérance.
Déterminer cette espérance en fonction de $f_\alpha(1)$ et $f_{\alpha-1}(1)$ seulement.

Partie II - Un logarithme complexe

Q14. Donner sans démonstration le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction qui à $x \in]-1, 1[$ associe $\ln(1+x)$.

Pour tout nombre complexe z, tel que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-z)^n}{n}$ est convergente, on note : $S(z) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-z)^n}{n}$.

Q15. Donner le rayon de convergence R de la série entière définissant S. Pour tout x réel élément de $]-R, R[$, déterminer la valeur de $\exp(S(x))$.

Soit $z_0 \in \mathbf{C}$ tel que $|z_0| < R$. On considère la série entière de la variable *réelle* t suivante :

$$\sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{z_0^n}{n} t^n.$$

En cas de convergence, on note $g(t)$ sa somme.

On a donc, pour $t \in \mathbf{R}$ tel que la série est convergente, $g(t) = S(tz_0)$.

Q16. Déterminer le rayon de convergence de la série entière définissant g.

Q17. Prouver que g est définie et de classe C^∞ sur $[0, 1]$. Déterminer, pour tout $t \in [0, 1]$, $g'(t)$.

Q18. On pose $h = \exp \circ g$. Prouver que pour tout $t \in [0, 1]$:

$$h'(t) = \frac{z_0}{1 + tz_0} h(t).$$

Q19. Résoudre l'équation différentielle de la question précédente et en déduire que :

$$\exp(S(z_0)) = z_0 + 1.$$

Partie III - Un équivalent de $f_\alpha(x)$ quand x tend vers 1, dans le cas où $\alpha \in]0,1[$

Dans toute cette partie, on suppose que $\alpha \in]0,1[$. L'objectif est de donner un équivalent de $f_\alpha(x)$ quand x tend vers 1.

Pour tout $x \in]0,1[$, on considère l'intégrale : $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\mathrm{d}t$.

Q20. Justifier que, pour tout $x \in]0,1[$, l'intégrale $I(x)$ est convergente.

Q21. On rappelle que la fonction Γ d'Euler est définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par : $\forall s \in \mathbf{R}_+^*, \Gamma(s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}\mathrm{d}t$.
Pour tout $x \in]0,1[$, déterminer une expression de $I(x)$ faisant intervenir $\ln(x)$, α et $\Gamma(1-\alpha)$.

Q22. Prouver que, pour tout $x \in]0,1[$, la fonction $t \mapsto \dfrac{x^t}{t^\alpha}$ définie pour tout $t \in \mathbf{R}_+^*$ est décroissante sur $\mathbf{R}_+^*$.

Q23. En déduire, pour tout $x \in]0,1[$, l'encadrement :

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\mathrm{d}t \leq f_\alpha(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\mathrm{d}t.$$

Q24. En déduire un équivalent de $f_\alpha(x)$ quand x tend vers 1.

PROBLÈME 2
Pour tout $C \in \mathbf{M}_n(\mathbf{C})$, $det(I_n + C\overline{C}) \in \mathbf{R}^+$

Dans ce problème, n désigne un entier non nul fixé.
On note $\mathbf{M}_n(\mathbf{C})$ (respectivement $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$) l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbf{C}$ (respectivement $\mathbf{R}$), $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ l'ensemble des matrices inversibles de taille n à coefficients dans $\mathbf{C}$ et $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ l'espace vectoriel des matrices colonnes de taille n à coefficients dans $\mathbf{C}$.
Pour toute matrice $M \in \mathbf{M}_n(\mathbf{C})$, on note $\chi_M = \det(XI_n - M)$ son polynôme caractéristique et $\mathrm{Sp}(M)$ l'ensemble de ses valeurs propres complexes. On pourra utiliser librement les produits matriciels par blocs.

Objectifs

On s'intéresse dans la **Partie I** à trois cas particuliers.
On montre d'abord que $\det(I_n + C\overline{C}) \geq 1$ dans le cas particulier des matrices diagonales complexes C, où $\overline{C}$ désigne la matrice conjuguée de C, c'est-à-dire la matrice obtenue en considérant le conjugué de chaque coefficient de C.
On montre ensuite que $\det(I_n + C^2) \geq 1$ dans le cas particulier des matrices symétriques réelles C.
On considère enfin le cas des matrices réelles C pour lesquelles on démontre que $\det(I_n + C^2) \in \mathbf{R}^+$.

La **Partie II** est consacrée au cas général.
On montre que pour toute matrice C de $\mathbf{M}_n(\mathbf{C})$, $\det\left(I_n + C\overline{C}\right) \in \mathbf{R}^+$.

Partie I - Trois cas particuliers

Q25. On se place dans le cas particulier où C est une matrice de $\mathbf{M}_n(\mathbf{C})$ diagonale. Démontrer que $\det\left(I_n + C\overline{C}\right) \in \mathbf{R}$ et que :

$$\det\left(I_n + C\overline{C}\right) \geq 1,$$

avec égalité si et seulement si $C = 0_{\mathbf{M}_n(\mathbf{C})}$.

Q26. On se place dans le cas particulier où C est une matrice de $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ symétrique. Démontrer que :

$$\det\left(I_n + C^2\right) \geq 1,$$

avec égalité si et seulement si $C = 0_{\mathbf{M}_n(\mathbf{R})}$.

Q27. Démontrer par récurrence sur n que : $\forall A \in \mathbf{M}_n(\mathbf{C}), \det\left(\overline{A}\right) = \overline{\det(A)}$.

Q28. On suppose dans cette question que C est une matrice de $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$. Déduire de la question précédente que, dans ce cas, on a :

$$\det\left(I_n + C^2\right) = |\det(C - iI_n)|^2.$$

En déduire que $\det\left(I_n + C^2\right) \in \mathbf{R}^+$ et que $\det\left(I_n + C^2\right) = 0$ si et seulement si $i \in \mathrm{Sp}(C)$.

Partie II - Le cas général

On considère dans cette partie une matrice C de $\mathbf{M}_n(\mathbf{C})$ et on démontre que $\det(I_n + C\overline{C}) \in \mathbf{R}^+$. Seule la **Q27** de la partie I sera utile pour la suite.

Q29. En considérant le produit matriciel $\begin{pmatrix} I_n & -C \\ \overline{C} & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -\overline{C} & I_n \end{pmatrix}$, démontrer que :

$$\det(I_n + C\overline{C}) = \det\begin{pmatrix} I_n & -C \\ \overline{C} & I_n \end{pmatrix}.$$

On notera désormais : $C_0 = \begin{pmatrix} I_n & -C \\ \overline{C} & I_n \end{pmatrix}$.

Q30. Soient $(r, s, t, u) \in \mathbf{C}^4$ et (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbf{C}^2$. On note φ l'endomorphisme de $\mathbf{C}^2$ dont la matrice dans la base (e_1, e_2) est $\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$. Exprimer la matrice de φ dans la base (e_2, e_1).

Q31. Soit $(R, S, T, U) \in (\mathbf{M}_n(\mathbf{C}))^4$. En s'inspirant de la question précédente, montrer que la matrice $\begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}$ est semblable dans $\mathbf{M}_{2n}(\mathbf{C})$ à la matrice $\begin{pmatrix} U & T \\ S & R \end{pmatrix}$. Montrer de même que $\begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} R & -S \\ -T & U \end{pmatrix}$.

Q32. En déduire que le polynôme caractéristique de la matrice C_0 est à coefficients réels.

Pour la suite, nous écrirons les vecteurs de $\mathbf{M}_{2n,1}(\mathbf{C})$ sous la forme $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, où $(X, Y) \in (\mathbf{M}_{n,1}(\mathbf{C}))^2$.
On considère l'application $\Omega : \mathbf{M}_{2n,1}(\mathbf{C}) \to \mathbf{M}_{2n,1}(\mathbf{C})$ définie par :

$$\forall \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{2n,1}(\mathbf{C}), \Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -\overline{Y} \\ \overline{X} \end{pmatrix}.$$

Q33. Démontrer les propriétés suivantes de l'application Ω :

a) Pour tout $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{2n,1}(\mathbf{C})$, $C_0\Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) = \Omega\left(C_0\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)$;

b) $\Omega \circ \Omega = -\,\mathrm{id}_{\mathbf{M}_{2n,1}(\mathbf{C})}$;

c) Pour tout $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{2n,1}(\mathbf{C})$ et tout $\lambda \in \mathbf{C}$, $\Omega\left(\lambda\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) = \overline{\lambda}\Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)$.

Q34. Soit $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in M_{2n,1}(\mathbf{C}) \setminus \{0_{\mathbf{M}_{2n,1}(\mathbf{C})}\}$.

Montrer que la famille $\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)\right)$ est libre et que le plan $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)\right)$ est stable par Ω.

Q35. Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbf{M}_{2n,1}(\mathbf{C})$ stable par Ω et soit $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{2n,1}(\mathbf{C}) \setminus E$.

Montrer que :

$$E \cap \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)\right) = \{0_{\mathbf{M}_{2n,1}(\mathbf{C})}\}.$$

Pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(C_0)$, on note $\alpha_\lambda \in \mathbf{N}^*$ sa multiplicité comme racine du polynôme caractéristique. On peut donc écrire : $\chi_{C_0} = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(C_0)} (X - \lambda)^{\alpha_\lambda}$. On note alors, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(C_0)$:

$$F_\lambda = \ker\left((\lambda I_{2n} - C_0)^{\alpha_\lambda}\right).$$

On admet, pour traiter la **Q38**, que pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(C_0)$, on a : $\dim F_\lambda = \alpha_\lambda$.

Q36. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(C_0)$, on a : $\Omega(F_\lambda) = F_{\overline{\lambda}}$.

Q37. Montrer que si $\lambda \in \mathrm{Sp}(C_0) \cap \mathbf{R}$, alors F_λ est de dimension paire.

Q38. Conclure que : $\det(C_0) \in \mathbf{R}^+$.

FIN