

**Objectif**

L'objectif de ce sujet est l'étude de la gestion des erreurs dans un processus industriel.

On considère un processus industriel automatisé au cours duquel une tâche répétitive est effectuée à chaque instant $n \in \mathbb{N}^*$. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre d'erreurs susceptibles de se produire à l'instant n . On admet que le système parvient à corriger ces erreurs et à maintenir son fonctionnement si le nombre total d'erreurs enregistrées jusqu'à l'instant n , noté $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, reste inférieur à une quantité de la forme amn , où $a > 1$ est une constante fixée et m est le nombre moyen d'erreurs enregistrées à chaque instant. On est donc amené à estimer une probabilité de la forme $P(S_n > nam)$, dans le but de montrer qu'elle tend vers 0 très rapidement lorsque n tend vers l'infini.

Dans la première partie, on étudie le cas particulier où les variables aléatoires X_n sont mutuellement indépendantes et de même loi de Poisson de paramètre $1/2$. Dans la deuxième partie, on démontre partiellement le théorème de Perron-Frobenius, qui permet, dans la troisième partie, d'étudier le cas où les variables aléatoires X_n forment une chaîne de Markov, c'est-à-dire où le nombre d'erreurs enregistrées à l'instant $n+1$ dépend uniquement de celui enregistré à l'instant n .

I Cas de la loi de Poisson

Dans cette partie, on étudie le modèle élémentaire où la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ du nombre d'erreurs aux instants successifs est une suite de variables aléatoires identiquement distribuées, mutuellement indépendantes, et suivant une loi de Poisson de paramètre $1/2$.

L'objectif de cette partie est de donner un équivalent de $P(S_n > n)$ lorsque n tend vers $+\infty$, afin de s'assurer que celle-ci converge vers 0 avec une vitesse de convergence exponentielle.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et G_{X_n} la fonction génératrice de X_n .

I.A – Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

- Q 1.** Montrer que S_n et X_{n+1} sont indépendantes.
- Q 2.** Expliciter le calcul de la fonction génératrice G_{X_1} de la variable aléatoire X_1 .
- Q 3.** Justifier que $\forall t \in \mathbb{R}, G_{S_n}(t) = (G_{X_1}(t))^n$.
- Q 4.** Montrer que la variable aléatoire S_n suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.

I.B –

- Q 5.** Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$n! \left(\frac{2}{n}\right)^n P(S_n > n) = e^{-n/2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n! n^k}{(n+k)!} \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

- Q 6.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\left(\frac{n}{n+k}\right)^k \leq \frac{n! n^k}{(n+k)!} \leq 1.$$

- Q 7.** Montrer que la série de fonctions $\sum u_k$ où pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_k est définie sur $[0, +\infty[$ par $u_k : x \mapsto (1+kx)^{-k} (1/2)^k$ est normalement convergente sur $[0, +\infty[$.

Q 8. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k \geq 1} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{-k} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ converge et que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{-k} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1.$$

Q 9. En déduire que, lorsque n tend vers $+\infty$,

$$P(S_n > n) \sim \frac{e^{-n/2}}{n!} \left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

Q 10. En déduire, à l'aide de la formule de Stirling, qu'il existe un réel $\alpha \in]0, 1[$ tel que $P(S_n > n) = O(\alpha^n)$.

II Quelques résultats sur les matrices

L'objectif de cette partie est de démontrer un certain nombre de résultats d'algèbre linéaire qui serviront dans la partie suivante.

Notations

- n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\text{sp}(A)$ l'ensemble des valeurs propres *complexes* de A et pour $\lambda \in \text{sp}(A)$, $E_\lambda(A) = \ker(A - \lambda I_n)$. On note $\rho(A) = \max \{|\lambda|, \lambda \in \text{sp}(A)\}$.
- On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *positive* si tous ses coefficients sont positifs. On note alors $A \geq 0$.
- On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *strictement positive* si tous ses coefficients sont strictement positifs. On note alors $A > 0$.
- Un vecteur x de $\mathbb{R}^n$ est dit *positif* si tous ses coefficients sont positifs. On note alors $x \geq 0$.
- Un vecteur x de $\mathbb{R}^n$ est dit *strictement positif* si tous ses coefficients sont strictement positifs. On note alors $x > 0$.
- On définit une relation d'ordre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $A \geq B$ si $A - B \geq 0$.
- On définit une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^n$ par $x \geq y$ si $x - y \geq 0$.
- Si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $|A|$ désigne la matrice $|A| = (|a_{i,j}|)_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Si $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{C}^n$ alors $|x|$ désigne le vecteur $|x| = (|x_i|)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$.
- On dit que $\lambda_0 \in \text{sp}(A)$ est une *valeur propre dominante* de A si, pour tout $\lambda \in \text{sp}(A) \setminus \{\lambda_0\}$, $|\lambda_0| > |\lambda|$.

On se propose de démontrer les deux propositions suivantes :

Proposition 1

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice strictement positive, alors $\rho(A)$ est une valeur propre dominante de A . Le sous-espace propre associé $\ker(A - \rho(A)I_n)$ est de dimension 1 et est dirigé par un vecteur propre strictement positif.

Proposition 2

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice strictement positive diagonalisable sur $\mathbb{C}$, si Y est un vecteur positif non nul de $\mathbb{R}^n$, alors $\left(\frac{A}{\rho(A)}\right)^p Y$ converge, lorsque p tend vers $+\infty$, soit vers le vecteur nul, soit vers un vecteur directeur strictement positif de $\ker(A - \rho(A)I_n)$.

Dans toute cette partie II, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice strictement positive.

II.A –

Q 11. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{cases} x \geq 0 \implies Ax \geq 0, \\ x \geq 0 \text{ et } x \neq 0 \implies Ax > 0. \end{cases}$$

Q 12. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $A^k > 0$.

Q 13. En déduire que $\rho(A) > 0$ puis montrer que $\rho\left(\frac{A}{\rho(A)}\right) = 1$.

Q 14. On suppose A diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Montrer que, si $\rho(A) < 1$ alors $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = 0$.

Dans la suite du problème, on admettra que cette dernière implication est vraie même si la matrice A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

II.B – On suppose, dans les sous-parties II.B et II.C, que A est une matrice strictement positive vérifiant $\rho(A) = 1$.

On considère une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de A de module 1 et x un vecteur propre associé à λ . On se propose de démontrer que 1 est valeur propre de A .

Q 15. Montrer que $|x| \leq A|x|$.

Dans les questions qui suivent, on suppose que $|x| < A|x|$.

Q 16. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $A^2|x| - A|x| > \varepsilon A|x|$.

Q 17. On pose $B = \frac{1}{1+\varepsilon} A$. Montrer que pour tout $k \geq 1$, $B^k A|x| \geq A|x|$.

Q 18. Déterminer $\lim_{k \rightarrow +\infty} B^k$.

Q 19. Conclure.

II.C –

Q 20. Montrer que A admet un vecteur propre strictement positif associé à la valeur propre 1.

Q 21. Montrer que 1 est la seule valeur propre de module 1 de A .

On pourra admettre sans démonstration que si $z_1, z_2, \dots, z_k$ sont des nombres complexes, tous non nuls, tels que $|z_1 + \dots + z_k| = |z_1| + \dots + |z_k|$, alors $\forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket, \exists \lambda_j \in \mathbb{R}^+$ tel que $z_j = \lambda_j z_1$.

Q 22. Montrer que $\dim(\ker(A - I_n)) = 1$.

Q 23. En regroupant les résultats des sous-parties II.B et II.C, justifier qu'on a démontré la proposition 1.

II.D – Dans cette sous-partie, on se propose de démontrer la proposition 2.

On suppose donc que A est strictement positive et diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on note $Y_p = \left(\frac{A}{\rho(A)}\right)^p Y$.

Q 24. Soit $\lambda \in S = \text{sp}(A) \setminus \{\rho(A)\}$. Soit $Y \in \ker(A - \lambda I_n)$. Montrer que la suite $(Y_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Q 25. Soit $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur positif. Montrer que la suite $(Y_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ converge vers le projeté de Y sur $E_{\rho(A)}(A)$ parallèlement à $\bigoplus_{\lambda \in S} E_{\lambda}(A)$. Vérifier que, s'il est non nul, ce dernier vecteur (le projeté de Y) est strictement positif.

Dans la suite du problème, on admet que la proposition 2 se généralise à toute matrice A strictement positive, même non diagonalisable et que, si $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est un vecteur strictement positif, alors la suite (Y_p) converge vers un vecteur strictement positif dirigeant $E_{\rho(A)}(A)$.

II.E – Cette sous-partie permet de déterminer la valeur propre dominante $\rho(A)$ d'une matrice carrée A strictement positive de taille $n \geq 2$.

Q 26. Justifier que pour tout entier $k \geq 1$, A^k est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à une matrice triangulaire, dont on précisera les coefficients diagonaux.

Q 27. Montrer que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\text{tr}(A^{k+1})}{\text{tr}(A^k)} = \rho(A)$.

III Une inégalité pour les chaînes de Markov

Dans toute cette partie III, N est un entier naturel non nul fixé et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans l'intervalle d'entiers $\llbracket 0, N \rrbracket$.

On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (i_1, i_2, \dots, i_{n+1}) \in \llbracket 0, N \rrbracket^{n+1}$,

$$P(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1) = P(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n).$$

On suppose que pour tout $(i, j) \in \llbracket 0, N \rrbracket^2$, $P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$ ne dépend pas de n et est strictement positif. On note alors $q_{i,j} = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$.

On dit que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une *chaîne de Markov homogène* sur $\llbracket 0, N \rrbracket$, de *matrice de transition* Q .

On attire l'attention sur les faits suivants :

- la numérotation des lignes et des colonnes de Q commence à 0 ;
- Q est une matrice carrée de taille $N + 1$.

Dans toute la suite, pour $n \geq 1$ fixé, on pose Π_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ \vdots \\ P(X_n = N) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{N+1,1}(\mathbb{R})$.

III.A – Justification de l'existence des lois $(\Pi_n)_{n \geq 1}$

Q 28. Justifier que $\forall i \in \llbracket 0, N \rrbracket, \sum_{j=0}^N q_{i,j} = 1$.

Q 29. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Pi_{n+1} = Q^\top \Pi_n$.

Q 30. En déduire que la loi de X_1 détermine entièrement les lois de toutes les variables aléatoires X_n , $n \in \mathbb{N}^*$.

Dans toute la suite, on considère une telle chaîne de Markov, et on pose

- $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ pour $n \in \mathbb{N}^*$;
- $a_{i,j}(t) = q_{i,j} e^{jt}$ pour tout $(i, j) \in \llbracket 0, N \rrbracket^2$ et tout $t \in \mathbb{R}$;
- $A(t) = (a_{i,j}(t))_{0 \leq i \leq N, 0 \leq j \leq N} \in \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R})$;
- $z_j(t) = P(X_1 = j) e^{jt}$ pour tout $j \in \llbracket 0, N \rrbracket$ et tout $t \in \mathbb{R}$;
- $Z(t) = \begin{pmatrix} z_0(t) \\ \vdots \\ z_N(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{N+1,1}(\mathbb{R})(\mathbb{R})$.

III.B – Définition de la fonction de taux λ

Soient n un entier naturel non nul et t un réel fixé.

On admet que l'espérance de la variable aléatoire e^{tS_n} est égale

$$E(e^{tS_n}) = \sum_{j=0}^N Y_j^{(n)}(t)$$

où $Y^{(n)}(t) = \begin{pmatrix} Y_0^{(n)}(t) \\ \vdots \\ Y_N^{(n)}(t) \end{pmatrix}$ est le vecteur colonne défini par $Y^{(n)}(t) = (A(t))^{n-1} Z(t)$.

Q 31. Justifier que $A(t)$ possède une valeur propre dominante $\gamma(t) > 0$.

Q 32. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(E(e^{tS_n}))}{n} = \lambda(t)$ où $\lambda(t) = \ln(\gamma(t))$.

III.C – Dans cette sous-partie, on étudie deux programmes écrits en langage Python. On suppose que la bibliothèque `numpy` a été importée à l'aide de l'instruction

```
import numpy as np
```

On rappelle que les opérations suivantes sont alors disponibles.

- `range(n)` renvoie la séquence des n premiers entiers ($0 \rightarrow n-1$).
- `np.array(u)` crée un nouveau tableau contenant les éléments de la séquence u . La taille et le type des éléments de ce tableau sont déduits du contenu de u .
- `a.shape(a)` renvoie un tuple donnant la taille du tableau a pour chacune de ses dimensions.
- `a.trace(a)` donne la trace du tableau a .
- `np.exp(a)` renvoie un tableau de même forme que le tableau a dont chaque terme est l'exponentielle du terme correspondant du tableau a (exponentielle terme à terme).
- `np.dot(a, b)` calcule le produit matriciel des tableaux a et b (sous réserve de compatibilité des dimensions).
- `x * a` renvoie un tableau de même forme que le tableau a correspondant au produit de chaque terme de a par le nombre x .
- `a * b` renvoie un tableau correspondant au produit terme à terme des deux tableaux a et b . Si a et b n'ont pas le même nombre de dimensions, le plus « petit » est virtuellement étendu afin de correspondre à la forme du plus « grand ». Par exemple si a est une matrice et b un vecteur, b doit avoir le même nombre de composantes que a a de lignes, il est alors virtuellement transformé en matrice avec le même nombre de colonnes que a , chaque colonne valant b .

Q 33. Écrire en langage Python une fonction `puiss2k` qui prend en argument une matrice carrée M et un entier naturel k et renvoie la matrice M^{2^k} en effectuant k produits matriciels. On pourra exploiter le fait que $M^{2^{k+1}} = M^{2^k} M^{2^k}$.

Q 34. Expliquer ce que fait la fonction Python `maxSp` définie par :

```
1 def maxSp(Q:np.ndarray, k:int, t:float) -> float:
2     n = Q.shape[1]
3     E = np.exp(t * np.array(range(n)))
4     A = Q * E
5     B = puiss2k(A, k)
6     C = np.dot(A, B)
7     return C.trace() / B.trace()
```

III.D – Une majoration théorique et son interprétation

On définit, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lambda^*(x) = \sup_{t \geq 0} (tx - \lambda(t))$.

On admet que cette borne supérieure existe et que la convergence de la suite de fonctions $\left(t \mapsto \frac{\ln(E(e^{tS_n}))}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vers la fonction $t \mapsto \ln(\gamma(t))$ démontrée à la question 32 est uniforme sur $\mathbb{R}^+$. On admet également dans toute la suite l'existence de $m = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} E(S_n)$ ainsi que les propriétés suivantes de λ^* :

$$\begin{cases} \lambda^*(x) = 0 & \text{pour tout } x \leq m, \\ \lambda^*(x) > 0 & \text{pour tout } x > m. \end{cases}$$

Dans toute la suite, ε désigne un réel strictement positif.

Q 35. Montrer qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$n \geq n_0 \implies \ln(E(e^{tS_n})) \leq n(\lambda(t) + \varepsilon)$$

Q 36. À l'aide de l'inégalité de Markov appliquée à la variable aléatoire e^{tS_n} , montrer que pour $a > 1$, $n \geq n_0$ et $t \geq 0$,

$$P(S_n \geq nam) \leq e^{-ntam} e^{n(\lambda(t) + \varepsilon)}.$$

Q 37. En déduire que pour $n \geq n_0$,

$$P(S_n \geq nam) \leq e^{-n(\lambda^*(am) - \varepsilon)}.$$

Q 38. Donner un sens concret à m en rapport avec le processus industriel étudié et interpréter l'inégalité précédente. On pourra établir un lien intuitif avec la loi des grands nombres.

III.E – Cette sous-partie constitue une application numérique et peut être traitée en admettant les résultats précédents.

On dispose de deux suites finies de réels $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_K$ ($K \geq 2$) et $x_1 < x_2 < \dots < x_L$ ($L \geq 2$). La formule de la question 32 appliquée en t_i avec n suffisamment grand permet d'estimer $\lambda(t_i)$ par une valeur approchée $\hat{\lambda}(t_i)$.

Q 39. Justifier que pour tout $i \in \{1, \dots, L\}$,

$$\hat{\lambda}^*(x_i) = \max_{1 \leq j \leq K} (t_j x_i - \hat{\lambda}(t_j))$$

constitue une valeur approchée raisonnable de $\lambda^*(x_i)$.

Le tableau 1 donne ces valeurs pour $L = 20$.

x_i	4,50	4,55	4,60	4,65	4,70
$\hat{\lambda}^*(x_i)$	$4,1 \times 10^{-12}$	$4,1 \times 10^{-12}$	$4,1 \times 10^{-12}$	$4,1 \times 10^{-12}$	$4,1 \times 10^{-12}$
x_i	4,75	4,80	4,85	4,90	4,95
$\hat{\lambda}^*(x_i)$	$5,1 \times 10^{-4}$	$5,5 \times 10^{-3}$	$1,1 \times 10^{-2}$	$1,6 \times 10^{-2}$	$2,1 \times 10^{-2}$
x_i	5,00	5,05	5,10	5,15	5,20
$\hat{\lambda}^*(x_i)$	$2,6 \times 10^{-2}$	$3,1 \times 10^{-2}$	$3,6 \times 10^{-2}$	$4,1 \times 10^{-2}$	$4,6 \times 10^{-2}$
x_i	5,25	5,30	5,35	5,40	5,45
$\hat{\lambda}^*(x_i)$	$5,1 \times 10^{-2}$	$5,6 \times 10^{-2}$	$6,1 \times 10^{-2}$	$6,6 \times 10^{-2}$	$7,1 \times 10^{-2}$

Tableau 1

Q 40. À l'aide du tableau 1, donner un encadrement approximatif de la valeur de m et la valeur d'un réel $h > 0$ tel qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$ vérifiant pour tout $n \geq n_0$,

$$P(S_n > 1, 1 \times nm) \leq e^{-nh}.$$

• • • FIN • • •
