CONCOURS COMMUN INP

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

MATHÉMATIQUES 1

Lundi 4 mai : 8 h - 12 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites

Le sujet est composé d'un problème qui comprend quatre parties indépendantes.

Objectifs

L'objectif de la **partie I** est de montrer l'existence d'un développement ternaire propre pour certains nombres réels.
La **partie II** propose l'étude d'une série de fonctions où les coefficients du développement ternaire sont remplacés par une fonction continue.
La **partie III** étudie des développements ternaires aléatoires.
La **partie IV** définit et présente quelques propriétés de la fonction de Cantor-Lebesgue.

Notations

On note T l'ensemble des suites réelles $t = (t_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $\{0;1;2\}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad t_n \in \{0;1;2\}.$$

On désigne par ℓ^∞ l'ensemble des suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ bornées et on pose $\| u \| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} |u_n|$.

On note $\lfloor y \rfloor$ la partie entière d'un réel y.

PARTIE I - Développement ternaire

Étude de l'application σ

Q1. Démontrer que ℓ^∞ est un espace vectoriel réel et que l'application $u \longmapsto \| u \|$ est une norme sur ℓ^∞.

Q2. Pour $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \ell^\infty$, démontrer que la série de terme général $\frac{u_n}{3^n}$ est convergente.
On note alors :

$$\sigma(u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{3^n}.$$

Q3. Démontrer que l'application σ est une forme linéaire continue sur ℓ^∞.

Q4. Démontrer que si $t = (t_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in T$, alors le réel $\sigma(t)$ est dans l'intervalle $[0,1]$.

Q5. On note $\tau = (\tau_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\tau' = (\tau'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les éléments de T définis par :

$$\tau_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\},\ \tau_n = 0 \qquad\qquad \tau'_1 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\},\ \tau_n = 2.$$

Calculer $\sigma(\tau)$ et $\sigma(\tau')$. L'application σ est-elle injective sur T ?

Développement ternaire propre

On fixe $x \in [0,1[$. On définit une suite $t(x) = (t_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad t_n(x) = \lfloor 3^n x \rfloor - 3\lfloor 3^{n-1} x \rfloor .$$

Q6. Démontrer que $t(x) \in T$.

Q7. On définit deux suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad x_n = \frac{\lfloor 3^n x \rfloor}{3^n} \quad \text{et} \quad y_n = x_n + \frac{1}{3^n}.$$

Démontrer que les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes de limite x. En déduire que :

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t_n(x)}{3^n}.$$

Que peut-on en conclure concernant l'application $\begin{cases} T \longrightarrow [0,1] \\ u \longmapsto \sigma(u) \end{cases}$?

La suite $t(x) = (t_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est appelée *développement ternaire propre* de x.

Q8. *Informatique pour tous.* Écrire en langage Python une fonction `flotVersTern(n,x)` d'arguments un entier naturel `n` et un flottant `x` et qui renvoie sous forme d'une liste les n premiers chiffres $t_1(x), \dots, t_n(x)$ définis dans la question précédente du développement ternaire de x.
Par exemple `flotVersTern(4,0.5)` renvoie `[1,1,1,1]`.

Q9. *Informatique pour tous.* Si $\ell = [\ell_1, \dots, \ell_n]$ est une suite finie d'entiers de $\{0; 1; 2\}$, on la complète avec des 0 pour en faire un élément de T encore noté ℓ.
Écrire en langage Python une fonction `ternVersFlot`(ℓ) d'arguments une liste d'entiers ℓ. Cette fonction renvoie en sortie le flottant $\sigma(\ell)$.
Par exemple `ternVersFlot([1,1,1,1])` renvoie `0.493827......`

Q10. *Informatique pour tous.* Si $\ell = [\ell_1, \dots, \ell_n]$ est une suite finie d'entiers de $\{0; 1; 2\}$, on lui ajoute un élément égal à -1 si la somme $\ell_1 + \cdots + \ell_n$ est paire et un élément égal à -2 sinon. Ce dernier élément permet alors d'essayer de détecter d'éventuelles erreurs de transmission.
Écrire en langage Python une fonction `ajout`(ℓ) qui ajoute à la liste ℓ un élément comme expliqué précédemment et qui renvoie la nouvelle liste.
Écrire en langage Python une fonction `verif`(ℓ) qui renvoie `True` si la valeur du dernier élément de ℓ est correcte et `False` sinon.
Par exemple `ajout([1,0,2,1,0])` renvoie `[1,0,2,1,0,-1]` et `verif([1,0,2,1,0,-2])` renvoie `False`.

PARTIE II - Étude d'une fonction définie par une série

Dans cette partie, on définit une fonction φ à l'aide d'un développement en série analogue au développement ternaire propre d'un réel, mais où la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est remplacée par une fonction numérique à valeurs dans l'intervalle [0,2].

Pour tout réel x on pose :

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + \sin(nx)}{3^n}.$$

Étude de l'application φ

Q11. Démontrer que φ est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Q12. Pour tout x réel, justifier l'écriture :

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} + \mathrm{Im}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{inx}}{3^n}\right)$$

et en déduire une expression simple de $\varphi(x)$ en fonction de $\sin(x)$ et $\cos(x)$.

Q13. Pour $x \in \mathbb{R}$, en déduire une expression simple de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\cos(nx)}{3^n}$ en fonction de $\cos(x)$.

Q14. À l'aide de $\displaystyle\int_0^{\pi} \varphi\,(x)\,\mathrm{d}x$ démontrer que :

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{10 - 6\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n3^{n+1}}\left((-1)^{n-1} + 1\right)$$

puis en calculant la somme de la série du second membre, en déduire la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{10 - 6\cos(x)}\,\mathrm{d}x\,.$$

Q15. Retrouver cette valeur par un calcul direct.

PARTIE III - Développements ternaires aléatoires

Dans cette partie, $(T_{n,N})_{n\geq 1, N\geq 2}$ est une suite de variables aléatoires discrètes réelles, mutuellement indépendantes, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et vérifiant :

$$\forall n \geq 1, \forall N \geq 2, T_{n,N}(\Omega) = \{0; 1; 2\}$$

$$\text{avec } \mathbb{P}\big(T_{n,N} = 0\big) = \mathbb{P}\big(T_{n,N} = 1\big) = \frac{1}{N} \text{ et } \mathbb{P}\big(T_{n,N} = 2\big) = 1 - \frac{2}{N}.$$

Soit $N \geq 2$ fixé. On pose :

$$X_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{T_{n,N}}{3^n}.$$

On admet que X_N est une variable aléatoire discrète réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Q16. Démontrer que X_N admet une espérance et une variance. Donner leur valeur en fonction de N.

Q17. Justifier que, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}(|X_N - \mathbb{E}(X_N)| \geq \varepsilon) = 0$$

Q18. Soit $\varepsilon > 0$, démontrer que :

$$\mathbb{P}(|X_N - 1| \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}\left(|X_N - \mathbb{E}(X_N)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) + \mathbb{P}\left(|\mathbb{E}(X_N) - 1| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}(|X_N - 1| \geq \varepsilon) = 0\,.$$

PARTIE IV - Fonction de Cantor-Lebesgue

Dans cette partie, on va définir et étudier la fonction de Cantor-Lebesgue.

Étude d'une suite de fonctions

On note f_0 la fonction définie sur $[0,1]$ par $f_0(x) = x$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\forall x \in [0,1], \quad f_{n+1}(x) = \begin{cases} \dfrac{f_n(3x)}{2} & \text{si } x \in \left[0, \dfrac{1}{3}\right] \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x \in \left]\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right[\\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{f_n(3x-2)}{2} & \text{si } x \in \left[\dfrac{2}{3}, 1\right] \end{cases}.$$

Q19. Représenter l'allure graphique des fonctions f_0, f_1 et f_2 sur trois schémas différents (pour f_2 on envisagera sept sous-intervalles de $[0,1]$).
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, démontrer que f_n est à valeurs dans $[0,1]$.

Q20. *Informatique.* Écrire en langage Python une fonction récursive `cantor(n,x)` qui renvoie la valeur de $f_n(x)$.

Q21. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, démontrer que :

$$\forall x \in [0,1], \quad |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{3 \times 2^{n+1}}.$$

Q22. En déduire que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$.

La limite de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est notée f.
On l'appelle *fonction de Cantor-Lebesgue*.

Q23. Démontrer que la fonction f est à valeurs dans $[0,1]$ et qu'elle est croissante et continue sur $[0,1]$. Démontrer aussi qu'elle est surjective de $[0,1]$ vers $[0,1]$.

La fonction f est aussi nommée « escalier du diable ». Les développements ternaires étudiés en début de problème permettent d'obtenir une expression analytique de $f(x)$.

FIN