A2019 – MATH I PSI

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT Atlantique, ENSAE PARISTECH,
CHIMIE PARISTECH.

Concours Centrale-Supélec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.

CONCOURS 2019

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - PSI

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Soit p un entier naturel non nul et r un nombre réel *strictement positif*. On considère la fonction

$$S_{r,p} : z \in \mathbf{C} \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(pn)^r}{(pn)!}\, z^{pn}.$$

L'objectif du problème est d'établir la validité de l'énoncé suivant :

$$S_{r,p}(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{p}\, x^r\, e^x \qquad (H_{r,p})$$

Cet objectif sera atteint dans la partie **II** pour le cas particulier $p = 1$, et dans la partie **III** pour le cas $p \geq 2$. Dans la partie **IV**, on étudie une application de ce résultat au comportement asymptotique d'une solution particulière d'une certaine équation différentielle d'ordre 2.

Dans tout le sujet, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière du nombre réel x, c'est-à-dire l'unique entier k tel que $k \leq x < k+1$. On rappelle que par convention $0^0 = 1$, tandis que $0^r = 0$ pour tout réel $r > 0$.

I Généralités, cas particuliers

1. Soit $r \in \mathbf{R}_+^*$ et $p \in \mathbf{N}^*$. Justifier que la série entière $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{(pn)^r}{(pn)!}\, z^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$, et faire de même pour la série entière $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{(pn)^r}{(pn)!}\, z^{np}$.

2. Pour x réel, expliciter $S_{0,1}(x)$ et $S_{0,2}(x)$, et en déduire la validité des énoncés $H_{0,1}$ et $H_{0,2}$.

II Une démonstration probabiliste de $H_{r,1}$

On admet dans cette partie qu'il existe, sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, une famille $(X_x)_{x \in \mathbf{R}_+^*}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{N}$ telle que X_x suive la loi de Poisson de paramètre x pour tout réel $x > 0$. On fixe de telles données dans l'intégralité de cette partie, et l'on fixe un réel $r > 0$. On pose

$$Z_x := \frac{X_x}{x}.$$

Pour $N \in \mathbf{N}^*$, on pose

$$Y_{x,N} := \prod_{k=0}^{N-1} (X_x - k) = X_x(X_x - 1) \cdots (X_x - N + 1).$$

3. Soit $x \in \mathbf{R}_+^*$. Montrer que $(Z_x)^r$ admet une espérance, et exprimer $\mathbf{E}\big((Z_x)^r\big)$ à l'aide de $S_{r,1}(x)$.

4. Pour $x > 0$, rappeler l'espérance et la variance de X_x. Déduire alors de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev que

$$\mathbf{P}\big(|Z_x - 1| \geq x^{-1/3}\big) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

5. Montrer que pour tout réel $x > 1$,
$$\left(1 - x^{-1/3}\right)^r \mathbf{P}(Z_x \geq 1 - x^{-1/3}) \leq \mathbf{E}\left((Z_x)^r\right).$$
Montrer en outre que
$$\left(1 - x^{-1/3}\right)^r \mathbf{P}(Z_x \geq 1 - x^{-1/3}) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

6. Soit $N \in \mathbf{N}^*$ et $x \in \mathbf{R}_+^*$. Montrer que $Y_{x,N}$ admet une espérance et que
$$\mathbf{E}(Y_{x,N}) = x^N.$$

7. Soit $N \in \mathbf{N}^*$. Montrer qu'il existe des réels $a_1, \dots, a_N$ tels que
$$a_N = 1 \quad \text{et} \quad \forall x > 0,\ (X_x)^N = \sum_{k=1}^{N} a_k\, Y_{x,k}.$$
On pourra introduire la famille $(H_j)_{j\in\mathbf{N}}$ *de polynômes à coefficients réels définie par*
$$H_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall j \in \mathbf{N}^*,\ H_j = \prod_{i=0}^{j-1}(T - i),$$
où l'indéterminée est notée T.
En déduire que
$$\mathbf{E}\left((Z_x)^N\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

8. On pose $N := \lfloor r \rfloor$ et $s := r - N$. Montrer l'inégalité
$$\forall t \in \mathbf{R}_+, \quad t^s \leq s(t-1) + 1,$$
et en déduire
$$\forall x > 0,\ (Z_x)^r \leq (1-s)\,(Z_x)^N + s\,(Z_x)^{N+1}.$$

9. En combinant les résultats précédents, établir la convergence
$$\mathbf{E}\left((Z_x)^r\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$
et conclure à la validité de l'énoncé $H_{r,1}$.

III Démonstration de $H_{r,p}$ pour $p \geq 2$

On fixe dans cette partie un entier naturel $p \geq 2$ et un réel $r > 0$, et l'on se propose de déduire la validité de $H_{r,p}$ de celle de $H_{r,1}$.

Pour $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}_+^*$, on pose
$$u_n(x) := \frac{n^r}{n!}\, x^n.$$

10. On fixe un réel $x > 0$. Étudier le signe de la fonction

$$\varphi_x : t \in [1, +\infty[\mapsto t^{1-r}(t-1)^r - x.$$

On montrera en particulier que φ_x s'annule en un unique élément de $[1, +\infty[$ que l'on notera t_x. En déduire que la suite finie $\big(u_n(x)\big)_{0 \leq n \leq \lfloor t_x \rfloor}$ est croissante et que la suite $\big(u_n(x)\big)_{n \geq \lfloor t_x \rfloor}$ est décroissante.

L'ensemble $\{u_n(x) \mid n \in \mathbf{N}\}$ admet donc un maximum valant $u_{\lfloor t_x \rfloor}(x)$. Dans la suite de cette partie, ce maximum sera noté M_x.

11. Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Déterminer la limite de $\varphi_x(x + \alpha)$ quand x tend vers $+\infty$. En déduire que

$$t_x - x - r \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Pour établir ce dernier résultat, on pourra revenir à la définition d'une limite.

12. Montrer que pour tout entier relatif k,

$$u_{\lfloor x \rfloor + k}(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} u_{\lfloor x \rfloor}(x).$$

13. Soit $m \in \mathbf{N}^*$. Montrer que

$$\sum_{i=\lfloor x \rfloor - m}^{\lfloor x \rfloor} u_i(x) \geq m\, u_{\lfloor x \rfloor}(x) \quad \text{pour } x \text{ voisin de } +\infty.$$

En déduire que, pour x voisin de $+\infty$,

$$u_{\lfloor x \rfloor}(x) \leq \frac{x^r e^x}{m} \cdot$$

14. En déduire que pour tout entier relatif k,

$$u_{\lfloor x \rfloor + k}(x) = o_{x \to +\infty}(x^r e^x)$$

puis que

$$M_x = o_{x \to +\infty}(x^r e^x).$$

En vue de ce dernier résultat, on pourra commencer par démontrer que, pour x assez grand, $M_x = u_{\lfloor x \rfloor + i}(x)$ pour un entier i compris entre $\lfloor r \rfloor - 1$ et $\lfloor r \rfloor + 2$.

15. Dans cette question et la suivante, on fixe un nombre complexe z tel que $|z| = 1$ et $z \neq 1$. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose

$$D_n := \sum_{k=0}^{n-1} z^k.$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ |D_n| \leq \frac{2}{|1-z|}$$

et que les séries $\sum\limits_n D_n\, u_{n-1}(x)$ et $\sum\limits_n D_n\, u_n(x)$ sont absolument convergentes.

16. On conserve le nombre complexe z introduit dans la question précédente. Montrer que

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*, \ \sum_{n=1}^{+\infty} D_n \left(u_{n-1}(x) - u_n(x)\right) = S_{r,1}(zx)$$

puis que, pour x voisin de $+\infty$,

$$\left|S_{r,1}(zx)\right| \leq \frac{4\,M_x}{|1-z|},$$

et conclure à la relation

$$S_{r,1}(zx) = o_{x\to+\infty}(x^r e^x).$$

17. On pose $\xi := \exp\left(\frac{2i\pi}{p}\right)$. Pour tout réel x, montrer que

$$\sum_{k=0}^{p-1} S_{r,1}(\xi^k x) = p\, S_{r,p}(x)$$

et en déduire la validité de $H_{r,p}$.

IV Application à une équation différentielle

On s'intéresse ici à l'équation différentielle :

$$(E): \quad t\,x''(t) - x(t) = 0.$$

18. Montrer que, parmi les solutions de (E) sur $\mathbf{R}$ à valeurs réelles, il en existe une et une seule, notée f, qui soit la somme d'une série entière et vérifie $f'(0) = 1$. Expliciter la suite $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \ f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n\, t^n.$$

19. Démontrer que

$$c_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{n}}{(2n)!}\, 4^n.$$

Pour la dernière question, on admet le résultat suivant :

Lemme de comparaison asymptotique des séries entières.
Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites à termes réels. On suppose que :

(i) La série entière $\sum_n b_n z^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$.

(ii) Il existe un rang $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, \ b_n > 0$.

(iii) Les suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont équivalentes.

Alors la série entière $\sum\limits_n a_n z^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$ et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{x\to+\infty}{\sim} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

20. En exploitant la validité de $H_{r,p}$ pour un couple (r,p) bien choisi, démontrer l'équivalent

$$f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{t^{1/4}}{2\sqrt{\pi}}\, e^{2\sqrt{t}}.$$

Fin du problème