

**Notations**

Pour tout réel x , on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière.

On note

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^* \quad A_n &= \left\{ \sum_{j=1}^n x_j 2^{n-j}, (x_j)_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \{0, 1\}^n \right\} \\ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad D_n &= \left\{ \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{2^j}, (x_j)_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \{0, 1\}^n \right\} \quad \text{et} \quad D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} D_n \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \pi_n(x) &= \frac{\lfloor 2^n x \rfloor}{2^n} \\ \forall (x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} \quad d_{n+1}(x) &= 2^{n+1}(\pi_{n+1}(x) - \pi_n(x))\end{aligned}$$

Soit Z une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs complexes et telle que $Z(\Omega)$ soit fini. En notant $\Re(Z)$ et $\Im(Z)$ les parties réelle et imaginaire de Z , on définit l'espérance de Z par

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(\Re(Z)) + i \mathbb{E}(\Im(Z)).$$

Si $Z_1, \dots, Z_n$ sont des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs complexes, mutuellement indépendantes, et telles que $Z_j(\Omega)$ soit fini pour tout j , on admet que

$$\mathbb{E} \left(\prod_{j=1}^n Z_j \right) = \prod_{j=1}^n \mathbb{E}(Z_j).$$

I Fonction caractéristique

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{-1, 1\}$ avec $\mathbb{P}(\varepsilon_n = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_n = -1) = 1/2$ pour tout $n \geq 1$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad X_n = \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon_k}{2^k}.$$

Pour X variable aléatoire réelle avec $X(\Omega)$ fini, on note

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}).$$

On définit également

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{sinc} t = \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit n un entier naturel non nul et t un réel.

Q 1. Montrer

$$\Phi_{X_n}(t) = \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{t}{2^k}\right).$$

Q 2. En déduire

$$\sin\left(\frac{t}{2^n}\right) \Phi_{X_n}(t) = \frac{\sin(t)}{2^n}.$$

- Q 3.** Déterminer la limite simple de la suite de fonctions $(\Phi_{X_n})_{n \geq 1}$.
- Q 4.** Étudier la continuité de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi_{X_n}$.
- Q 5.** Montrer que X_n et $-X_n$ ont même loi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- Q 6.** En déduire la limite simple de la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \varphi_n : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \mathbb{E}(\cos(tX_n)) \end{cases}$$

- Q 7.** La suite de fonctions $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$?

II Écriture binaire

Soit n un entier naturel non nul. On pose

$$\Phi_n : \begin{cases} \{0, 1\}^n \rightarrow \llbracket 0, 2^n - 1 \rrbracket \\ (x_j)_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \mapsto \sum_{j=1}^n x_j 2^{n-j} \end{cases}$$

- Q 8.** Montrer que Φ_n est bien définie en vérifiant $\text{Im } \Phi_n \subset \llbracket 0, 2^n - 1 \rrbracket$.

- Q 9.** Préciser $\text{Im } \Phi_n$ en fonction de A_n .

- Q 10.** Montrer par récurrence

$$\forall k \in \llbracket 0, 2^n - 1 \rrbracket, \quad k \in \text{Im } \Phi_n.$$

- Q 11.** En déduire que Φ_n est bijective.

- Q 12.** Établir la monotonie au sens de l'inclusion de la suite $(D_n)_{n \geq 1}$ puis vérifier $D \subset [0, 1[$.

- Q 13.** Établir

$$\forall (x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}, \quad \pi_n(x) \leq x < \pi_n(x) + \frac{1}{2^n}.$$

- Q 14.** Justifier

$$\forall x \in [0, 1[, \forall k \in \mathbb{N}, \quad \pi_k(x) = \sum_{j=1}^k \frac{d_j(x)}{2^j}.$$

- Q 15.** Établir

$$\forall (x, j) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*, \quad d_j(x) \in \{0, 1\}.$$

- Q 16.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier $x \in D_n \iff 2^n x \in \llbracket 0, 2^n - 1 \rrbracket$.

- Q 17.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'application

$$\Psi_n : \begin{cases} \{0, 1\}^n \rightarrow D_n \\ (x_j)_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \mapsto \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{2^j} \end{cases}$$

est bijective.

- Q 18.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x = \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{2^j}$ avec $(x_j)_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \{0, 1\}^n$. Montrer

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \pi_k(x) = \sum_{j=1}^{\min(n, k)} \frac{x_j}{2^j}.$$

III Développement dyadique, loi et décomposition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(U_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. On pose

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad Y_n &= \sum_{k=1}^n \frac{U_k}{2^k} \\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad F_n(x) &= \mathbb{P}(Y_n \leq x) \quad G_n(x) = \mathbb{P}(Y_n < x) \end{aligned}$$

Q 19. Justifier

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(Y_n \in [0, 1]) = 1.$$

Q 20. Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in D_n, \quad F_n(x) = x + \frac{1}{2^n}.$$

Q 21. Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in D_n, \quad G_n(x) = x.$$

Q 22. Établir, pour tout entier naturel non nul n , que Y_n suit une loi uniforme sur D_n .

Q 23. Réciproquement, soit n un entier naturel non nul et soit X_n une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur D_n . Montrer qu'il existe des variables aléatoires $V_1, \dots, V_n$ mutuellement indépendantes, suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$, et telles que

$$X_n = \sum_{k=1}^n \frac{V_k}{2^k}.$$

IV Développement dyadique, étude asymptotique

On conserve les notations introduites dans la partie III.

Q 24. Soit x réel. Établir la monotonie des suites $(F_n(x))_{n \geq 1}$ et $(G_n(x))_{n \geq 1}$.

Q 25. En déduire la convergence simple des suites de fonctions $(F_n)_{n \geq 1}$ et $(G_n)_{n \geq 1}$.

Q 26. Montrer

$$\forall x \in D \cup \{1\}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = x \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} G_n(x) = x.$$

Q 27. Généraliser les résultats obtenus à la question précédente pour tout $x \in [0, 1]$.

Q 28. Montrer que pour tout intervalle non vide $I \subset [0, 1]$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Y_n \in I) = \ell(I) \quad \text{avec} \quad \ell(I) = \sup I - \inf I.$$

Q 29. En déduire que, pour toute fonction f continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, la suite $(\mathbb{E}(f(Y_n)))_{n \geq 1}$ converge et préciser sa limite.

Q 30. À l'aide du résultat précédent, proposer une autre démonstration du résultat obtenu à la question 6.

Q 31. Une application. Justifier l'existence de $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt$ puis déterminer sa valeur.

$$\text{On pourra considérer } \int_0^1 \mathbb{E}(t^{Y_n}) dt.$$

V Dénombrabilité

Q 32. L'ensemble D est-il dénombrable ?

Q 33. On suppose qu'il existe $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ bijective. En considérant $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \notin f(x)\}$, établir une contradiction.

Q 34. Montrer que l'application $\Phi : \begin{cases} \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \\ A \mapsto \mathbb{1}_A \end{cases}$ est bijective.

Q 35. Montrer que l'application

$$\Psi : \begin{cases} \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow [0, 1] \\ (x_n) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}} \end{cases}$$

est bien définie et surjective. Est-elle injective ?

On note $D^* = D \setminus \{0\}$. On pose pour tout $(x_n) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$

$$\Lambda((x_n)) = \begin{cases} \Psi((x_n)) & \text{si } \Psi((x_n)) \in [0, 1[\setminus D^* \\ \frac{\Psi((x_n))}{2} & \text{si } \Psi((x_n)) \in D \cup \{1\} \text{ et } (x_n) \text{ stationnaire à } 1 \\ \frac{1 + \Psi((x_n))}{2} & \text{si } \Psi((x_n)) \in D^* \text{ et } (x_n) \text{ stationnaire à } 0 \end{cases}$$

Q 36. Montrer que Λ réalise une bijection de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ sur $[0, 1[$.

Q 37. Conclure que $[0, 1[$ n'est pas dénombrable.

• • • FIN • • •
