A2018 – MATH I PC

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT Atlantique, ENSAE PARISTECH.

Concours Centrale-Supélec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.

CONCOURS 2018

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Notations :

— Si x est un nombre réel on note $[x]$ sa partie entière, c'est-à-dire le plus grand entier relatif qui est inférieur ou égal à x.

— On appelle cardinal de l'ensemble fini E le nombre de ses éléments, que l'on note $|E|$.

— On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de l'ensemble E.

— Dans tout le problème on identifiera $\mathbf{R}^n$ à l'espace des matrices lignes $M_{1,n}(\mathbf{R})$ et on notera $\langle x,\, y\rangle$ le produit scalaire canonique des deux vecteurs, soit

$$\langle x,\, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j,$$

les x_j, y_j étant les composantes de x, y respectivement.

— Si $\mathcal{V}$ est un sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$ on note $\mathrm{Vect}(\mathcal{V})$ l'espace vectoriel engendré par $\mathcal{V}$. On note $\mathcal{V}^\perp$ l'orthogonal de $\mathcal{V}$, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs y tels que $\forall x \in \mathcal{V},\ \langle x, y\rangle = 0$.

— Si M est une matrice carrée de nombres réels, on note $\det(M)$ son déterminant.

Dans tout le problème on pourra utiliser librement la formule de Stirling que l'on rappelle :

$$n! \sim_{n\to+\infty} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Définition 1 (Espace de Rademacher) *Si $n,\, q \in \mathbf{N}^*$, on note*

$$\Omega_{q,n} = \Big\{\omega = \big(\omega_{i,j},\ 1 \le i \le q,\ 1 \le j \le n\big) \text{ tels que } \omega_{i,j} = \pm 1,\ \forall i, j\Big\}.$$

Pour tout $i \in \{1, \cdots, q\}$ et $j \in \{1, \cdots, n\}$, on introduit la variable aléatoire $M_{i,j}$ telle que

$$\begin{aligned} M_{i,j}\ :\ \Omega_{q,n} &\longrightarrow \{-1, 1\} \\ \omega &\longmapsto \omega_{i,j}. \end{aligned}$$

On munit $\Omega_{q,n}$ de la probabilité uniforme $\mathbf{P}$. Cela signifie que les variables aléatoires $(M_{i,j},\ 1 \le i \le q,\ 1 \le j \le n)$ sont indépendantes et de même loi :

$$\mathbf{P}(M_{i,j} = 1) = \frac{1}{2} = \mathbf{P}(M_{i,j} = -1).$$

Si $q = n$, on note $M^{(n)}$ la matrice aléatoire

$$M^{(n)} = \begin{pmatrix} M_{1,1} & \cdots & M_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ M_{n,1} & \ldots & M_{n,n} \end{pmatrix}.$$

On note $L_1^{(n)}, \cdots, L_n^{(n)}$ les vecteurs lignes de $M^{(n)}$. Par construction, ce sont des vecteurs aléatoires indépendants et de même loi.

Le but du problème est de démontrer, qu'ainsi construite, une matrice aléatoire est inversible avec forte probabilité quand n est grand :

Théorème 1 (Komlós) $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\Big(\det M^{(n)} = 0\Big) = 0$.

A Coefficients binomiaux

1. Soit $n \in \mathbf{N}^*$: montrer que l'application

$$k \longmapsto \binom{n}{k}$$

est croissante sur $\{0, \cdots, [n/2]\}$. En déduire que pour tout $k \in \{0, \cdots, n\}$,

$$\binom{n}{k} \leq \binom{n}{[n/2]}.$$

2. Trouver un équivalent de $\displaystyle\binom{n}{[n/2]}$ quand n tend vers l'infini. En déduire qu'il existe un entier n_0 tel que pour $n \geq n_0$,

$$\binom{n}{[n/2]} \leq \frac{2^n}{\sqrt{n}}. \tag{1}$$

3. Montrer que pour tout entier non nul n et tout $k \in \{0, \cdots, n\}$,

$$\binom{n}{k} 2^{k-1} \leq n^k.$$

On note $(e_i, 1 \leq i \leq n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$ et $v = \sum_{i=1}^n e_i$. On identifie $\Omega_{1,n}$ et le sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$

$$\left\{ \sum_{i=1}^n \omega_i \ e_i, \ (\omega_1, \cdots, \omega_n) \in \Omega_{1,n} \right\}.$$

4. Pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, exprimer e_i en fonction de v et $v - 2e_i$. En déduire que $\mathrm{Vect}(\Omega_{1,n}) = \mathbf{R}^n$.

B Dimension 2

5. Déterminer l'espérance de $\det M^{(2)}$.

6. Montrer que la variance de $\det M^{(2)}$ est égale à 2.

7. Calculer $\mathbf{P}\Big(\det M^{(2)} = 0\Big)$.

C Quelques bornes

On suppose dorénavant $n \geq 2$.

8. Quelle est la probabilité que les deux premières lignes de $M^{(n)}$ soit égales ou opposées ?

   En déduire que $\mathbf{P}\Big(\det M^{(n)} = 0\Big) \geq 2^{1-n}$ si $n \geq 2$.

9. Soient $l_1, \cdots, l_n$ des vecteurs non nuls de $\mathbf{R}^n$. Montrer que ces vecteurs sont liés si et seulement si, il existe $j \in \{1, \cdots, n-1\}$ tel que

$$l_{j+1} \in \mathrm{Vect}(\{l_1, \cdots, l_j\}).$$

   En déduire que

$$\mathbf{P}\Big(\det M^{(n)} = 0\Big) \;\leq\; \sum_{j=1}^{n-1} \mathbf{P}\Big(L_{j+1}^{(n)} \in \mathrm{Vect}(L_1^{(n)}, \cdots, L_j^{(n)})\Big). \tag{2}$$

Soit $\mathcal{H}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ de dimension d. On rappelle que $\mathcal{H}^\perp$ est un sous-espace vectoriel de dimension $n-d$ et que $(\mathcal{H}^\perp)^\perp = \mathcal{H}$.

10. Montrer alors qu'il existe des réels $(\alpha_{i,j},\ 1 \leq i \leq n-d,\ 1 \leq j \leq n)$ tels que

$$x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathcal{H} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n-d,1} & \dots & \alpha_{n-d,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

11. En utilisant le pivot de Gauss, montrer qu'il existe $1 \leq i_1 < \cdots < i_d \leq n$ tel que pour tout $(y_1, \cdots, y_d) \in \mathbf{R}^d$ il existe un unique $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathcal{H}$ tel que $x_{i_k} = y_k$ pour $k = 1, \cdots, d$.

12. En déduire que

$$\mathbf{P}(L_1^{(n)} \in \mathcal{H}) \leq 2^{d-n},$$

   puis que pour tout $j \in \{1, \cdots, n-1\}$,

$$\mathbf{P}\Big(L_{j+1}^{(n)} \in \mathrm{Vect}(L_1^{(n)}, \cdots, L_j^{(n)})\Big) \leq 2^{j-n}. \tag{3}$$

Indication : on pourra utiliser la conséquence suivante de la formule des probabilités totales

$$\mathbf{P}\Big(L_{j+1}^{(n)} \in \mathrm{Vect}(L_1^{(n)}, \cdots, L_j^{(n)})\Big)$$
$$= \sum_{l_1,\cdots,l_j \in \Omega_{1,n}} \mathbf{P}\Big(L_{j+1}^{(n)} \in \mathrm{Vect}(l_1, \cdots, l_j) \mid L_1^{(n)} = l_1, \cdots, L_j^{(n)} = l_j\Big)$$
$$\times \mathbf{P}(L_1^{(n)} = l_1, \cdots, L_j^{(n)} = l_j)$$

et l'indépendance des vecteurs lignes.

Soit $q < n$ et $\omega \in \Omega_{q,n}$. On note $l_1, \cdots, l_q$ ses vecteurs lignes.

13. Montrer que l'on peut trouver un vecteur non nul orthogonal à $\mathrm{Vect}(l_i, i = 1, \cdots, q)$ qui soit à coordonnées dans $\mathbf{Z}$.

D Théorème de Erdös-Littlewood-Offord

Définition 2 *Soit n un entier non nul. Soit $\mathcal{A}$ un sous-ensemble de $\mathcal{P}(\{1, \cdots, n\})$. On dit que $\mathcal{A}$ est une anti-chaîne si deux éléments distincts A, B quelconques de $\mathcal{A}$ sont incomparables, c'est-à-dire tels que A n'est pas inclus dans B et B n'est pas inclus dans A.*

Commençons par un exemple. Soit $k \in \{1, \cdots, n\}$ et $\mathcal{A}_k$ l'ensemble des parties de $\{1, \cdots, n\}$ de cardinal k.

14. Montrer que $\mathcal{A}_k$ est une anti-chaîne et que

$$|\mathcal{A}_k| \leq \binom{n}{[n/2]} \leq \frac{2^n}{\sqrt{n}},$$

la deuxième inégalité ayant lieu pour n assez grand.

Définition 3 *Soit $\mathcal{A}$ une anti-chaîne et $A \in \mathcal{A}$, de cardinal noté $|A|$. On note $\mathcal{S}_A$, l'ensemble des bijections σ de $\{1, \cdots, n\}$ dans lui-même telles que la restriction de σ à $\{1, \cdots, |A|\}$ soit une bijection de $\{1, \cdots, |A|\}$ dans A.*

15. Quel est le cardinal de $\mathcal{S}_A$?

16. Soit $B \in \mathcal{A}$ avec $B \neq A$. Montrer que $\mathcal{S}_A \cap \mathcal{S}_B = \emptyset$.

17. En déduire que si a_k désigne, pour $k \leq n$, le nombre d'éléments de $\mathcal{A}$ de cardinal k, alors

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{\binom{n}{k}} \leq 1.$$

18. Montrer que

$$|\mathcal{A}| \leq \binom{n}{[n/2]}.$$

Soit $v = (v_1, \cdots, v_n) \in \mathbf{R}^n$ tel que $v_j \geq 1$, pour tout $j = 1, \cdots, n$. Si $A \subset \{1, \cdots, n\}$ on pose

$$s_A = \sum_{j \in A} v_j - \sum_{j \in A^c} v_j$$

où A^c est le complémentaire de A dans $\{1, \cdots, n\}$.

19. Montrer que si $A \subset B \subset \{1, \cdots, n\}$, $A \neq B$, alors

$$s_B - s_A \geq 2.$$

20. Soit J un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ de longueur 2 : montrer que si n est assez grand alors

$$\mathbf{P}(< L_1^{(n)}, v > \in J) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Montrer que cette propriété reste vraie si l'on suppose seulement que pour tout $j \in \{1, \cdots, n\}$, $|v_j| \geq 1$.

Indication : construire une bijection entre $\Omega_{1,n}$ et l'ensemble des parties de $\{1, \cdots, n\}$. Construire une anti-chaîne intéressante.

E Universalité

Dans tout ce qui suit, k est un entier inférieur à n.

Définition 4 *Soit $\mathcal{V} \subset \Omega_{1,n}$. L'ensemble $\mathcal{V}$ est dit k-universel si pour tous les $k-$uplets $1 \leq j_1 < j_2 \ldots < j_k \leq n$ et tout $\omega \in \Omega_{1,n}$, il existe $v \in \mathcal{V}$ tel que*

$$v_{j_m} = \omega_{1,j_m}, \text{ pour tout } m = 1, \cdots, k.$$

21. Soit $d \in \{1, ..n\}$. Montrer l'inclusion

$$\Big\{\{L_1^{(n)}, \cdots, L_d^{(n)}\} \text{ non } k\text{-universel}\Big\}$$

$$\subset \bigcup_{\substack{(j_1, \cdots, j_k) \in \{1, \cdots, n\}^k \\ j_1 < \ldots < j_k}} \bigcup_{\omega \in \Omega_{1,k}} \bigcap_{i=1}^{d} \bigcup_{m=1}^{k} \{M_{i,j_m} \neq \omega_{1,j_m}\}.$$

(On rappelle que $L_i^{(n)} = (M_{i,1}, \cdots, M_{i,n})$).

22. Montrer que la probabilité que $\{L_1^{(n)}, \cdots, L_d^{(n)}\}$ ne soit pas $k-$universel est majorée par

$$\binom{n}{k} 2^k (1 - 2^{-k})^d.$$

23. En déduire que si $d \geq n/2$ et $k \leq \ln n$, alors, pour n assez grand,

$$\mathbf{P}\Big(\{L_1^{(n)}, \cdots, L_d^{(n)}\} \text{ non } k\text{-universel}\Big) \leq \frac{1}{n}\cdot \tag{4}$$

24. Soit $\mathcal{V} \subset \Omega_{1,n}$ un ensemble k-universel tel qu'il existe $v \in \mathcal{V}^{\perp}\backslash\{0\}$: montrer que v a au moins $k+1$ coordonnées non nulles.

En vertu de la question 13, on peut supposer que les coordonnées de v sont des entiers relatifs.

25. Montrer que si k est assez grand

$$\mathbf{P}\Big(L_1^{(n)} \in \mathrm{Vect}(\mathcal{V})\Big) \leq \mathbf{P}\Big(\langle L_1^{(n)}, v\rangle = 0\Big) \leq k^{-1/2}. \tag{5}$$

Soit $(t_n,\, n \in \mathbf{N})$ une suite croissante d'entiers telle que $t_n/n \to 0$.

26. Montrer que si n est assez grand alors $n - t_n \geq n/2$ et

$$\sum_{j=n-t_n+1}^{n-1} \mathbf{P}\Big(L_{j+1}^{(n)} \in \mathrm{Vect}(L_1^{(n)}, \cdots, L_j^{(n)})\Big) \leq \frac{2\,t_n}{\sqrt{\ln n}}\cdot \tag{6}$$

Indication : on distinguera les cas selon que $\mathrm{Vect}(L_1^{(n)}, \cdots, L_j^{(n)})$ *est* k*-universel ou pas et l'on prendra* $k = [\ln n]$.

F Théorème de Komlós

27. En déduire le théorème de Komlós.

Indication : on pourra partir de (2) *et choisir convenablement une suite* $(t_n,\, n \geq 1)$.

Fin du problème