

**Objectifs et notations**

Le fil conducteur du problème est l'étude de certaines questions liées à la fonction zêta, notée ζ , définie par

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

- Dans la partie I, on introduit la fonction ζ et on étudie son allure (variations, limites, courbe représentative).
- La partie II étudie une fonction f définie comme la somme d'une série de fonctions. Le développement en série entière de la fonction f fait intervenir la fonction ζ .
- La partie III utilise la fonction ζ pour construire une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$ et montrer des résultats liant les probabilités et l'arithmétique.

I Fonction zêta

On note ζ la fonction de la variable réelle x définie par

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

On note $\mathcal{D}_\zeta$ son ensemble de définition.

- Q 1.** Déterminer $\mathcal{D}_\zeta$.
- Q 2.** Montrer que ζ est continue sur $\mathcal{D}_\zeta$.
- Q 3.** Étudier le sens de variation de ζ .
- Q 4.** Justifier que ζ admet une limite en $+\infty$.

- Q 5.** Soit $x \in \mathcal{D}_\zeta$ et soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Montrer : $\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{n^x} \leq \int_{n-1}^n \frac{dt}{t^x}$.

- Q 6.** En déduire, que pour tout $x \in \mathcal{D}_\zeta$,

$$1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leq \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}$$

- Q 7.** Déterminer la limite de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures.
- Q 8.** Déterminer la limite de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
- Q 9.** Donner l'allure de la courbe représentative de ζ .

II Étude d'une fonction définie par une somme

Dans cette partie, f désigne la fonction définie par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n} \right)$$

On note $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f .

II.A – Ensemble de définition et variations

- Q 10.** Déterminer $\mathcal{D}_f$.
- Q 11.** Montrer que f est continue sur $\mathcal{D}_f$ et étudier ses variations.

II.B – Équivalents

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

Q 12. Calculer $f(k)$.

Q 13. En déduire un équivalent de f en $+\infty$.

Q 14. Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, vérifier que $x + k \in \mathcal{D}_f$, puis calculer $f(x + k) - f(x)$.

Q 15. En déduire un équivalent de f en $-k$. Quelles sont les limites à droite et à gauche de f en $-k$?

II.C – Série entière

On considère la série entière de la variable réelle x donnée par $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} (-1)^k \zeta(k+1) x^k$.

Q 16. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière. Y a-t-il convergence en $x = \pm R$?

Q 17. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}_f$ et calculer $f^{(k)}(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Q 18. Montrer qu'il existe $A \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]-1, 1[, \quad |f^{(k)}(x)| \leq k! \left(A + \frac{1}{(x+1)^{k+1}} \right)$$

Q 19. En déduire que f est développable en série entière sur $] -1, 1[$ et que

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \zeta(k+1) x^k$$

II.D – Intégrales

Q 20. Déterminer pour quels $x \in \mathbb{R}$ l'intégrale ci-dessous est convergente

$$\int_0^1 \frac{t^x - 1}{1 - t} dt$$

Q 21. En remarquant que, pour tout $t \in [0, 1[$, $\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$, montrer que

$$\forall x \in]-1, +\infty[, \quad f(x) = \int_0^1 \frac{t^x - 1}{1 - t} dt$$

Q 22. Dédurre des questions précédentes une expression intégrale de $\zeta(k+1)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Q 23. Montrer enfin que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \zeta(k+1) = \frac{1}{k!} \int_0^{+\infty} \frac{u^k}{e^u - 1} du$$

III Probabilités

Rappels d'arithmétique

On rappelle ici quelques propriétés élémentaires d'arithmétique.

— Pour tout $(a, b) \in \mathbb{N}^{*2}$, on dit que a divise b s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $b = ka$. On dit aussi que a est un diviseur de b , ou encore que b est multiple de a .

Pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, on note $a\mathbb{N}^*$ l'ensemble des multiples de a dans $\mathbb{N}^*$. Ainsi, a divise b si et seulement si $b \in a\mathbb{N}^*$.

— Pour tout $(a, b) \in \mathbb{N}^{*2}$, le plus grand commun diviseur (PGCD) de a et b est l'entier naturel noté $a \wedge b$ tel que

$$a \wedge b = \max \{ n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } n \text{ divise } a \text{ et } n \text{ divise } b \}$$

— Pour tout $(a, b) \in \mathbb{N}^{*2}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a l'équivalence

$$n \text{ divise } a \wedge b \iff n \text{ divise } a \text{ et } n \text{ divise } b$$

— On dit qu'un entier naturel p supérieur ou égal à 2 est un nombre premier si ses seuls diviseurs sont 1 et p .
Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. On rappelle que $\mathcal{P}$ est infini.

On note $p_1 < p_2 < p_3 < \dots < p_n < p_{n+1} < \dots$ la suite des nombres premiers rangés dans l'ordre croissant.
Ainsi, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, etc.

— Si $n \in \mathbb{N}^*$, si $q_1, \dots, q_n$ sont des nombres premiers distincts et, alors pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, on a l'équivalence

$$(\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad q_i \text{ divise } a) \iff \prod_{i=1}^n q_i \text{ divise } a$$

— Pour tout $a \in \mathbb{N}^*$ tel que $a \geq 2$, il existe $p \in \mathcal{P}$ tel que p divise a .

III.A – Loi zêta

Q 24. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x > 1$. Montrer qu'on définit la loi de probabilité d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ en posant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{\zeta(x)n^x}$$

On dira qu'une telle variable aléatoire X suit la loi de probabilité zêta de paramètre x .

Dans les questions suivantes de cette sous-partie III.A, on suppose que X est une variable aléatoire qui suit la loi zêta de paramètre $x > 1$.

Q 25. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur x pour que X admette une espérance finie. Exprimer alors cette espérance à l'aide de ζ .

Q 26. Plus généralement, pour tout $k \in \mathbb{N}$, donner une condition nécessaire et suffisante portant sur x pour que X^k admette une espérance finie. Exprimer alors cette espérance à l'aide de ζ .

Q 27. En déduire la variance de X .

Q 28. Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X \in a\mathbb{N}^*) = \frac{1}{a^x}$.

III.B – Mutuelle indépendance

Soit x un réel tel que $x > 1$ et soit X une variable aléatoire qui suit la loi zêta de paramètre x .

Soit enfin $(q_1, \dots, q_n) \in \mathcal{P}^n$, un n -uplet de nombres premiers distincts.

Q 29. Montrer que les événements $(X \in q_1\mathbb{N}^*), \dots, (X \in q_n\mathbb{N}^*)$ sont mutuellement indépendants.

Cela entraîne, et on ne demande pas de le démontrer, que leurs complémentaires sont mutuellement indépendants.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement $B_n = \bigcap_{k=1}^n (X \notin p_k\mathbb{N}^*)$.

Q 30. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(X = 1)$. En déduire que

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad \frac{1}{\zeta(x)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_k^x}\right)$$

III.C – Deux variables indépendantes suivant une loi zêta

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x > 1$. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi de probabilité zêta de paramètre x . Soit A l'événement « Aucun nombre premier ne divise X et Y simultanément ».

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note C_n l'événement

$$C_n = \bigcap_{k=1}^n ((X \notin p_k\mathbb{N}^*) \cup (Y \notin p_k\mathbb{N}^*))$$

Q 31. Exprimer l'événement A à l'aide des événements C_n . En déduire que

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{\zeta(2x)}$$

III.D – Deux variables indépendantes suivant une loi uniforme

Soient U_n et V_n deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. On note $W_n = U_n \wedge V_n$.

Q 32. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que

$$\mathbb{P}(W_n \in k\mathbb{N}^*) = \left(\frac{\lfloor n/k \rfloor}{n} \right)^2$$

On admet que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la suite $(\mathbb{P}(W_n = k))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ_k .

Q 33. Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists M \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \forall m \in \mathbb{N}^*, m \geq M \implies 1 - \varepsilon \leq \sum_{k=1}^m \ell_k \leq 1$$

Q 34. En déduire que $(\ell_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ définit une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$.

On note W une variable aléatoire sur $\mathbb{N}^*$ qui suit cette loi de probabilité. En adaptant la méthode de la question 33, on peut établir que, pour toute partie B de $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(W \in B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(W_n \in B)$. On ne demande pas de démontrer ce résultat.

Enfin, on admet le résultat suivant : si X et Y sont deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et si, pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X \in a\mathbb{N}^*) = \mathbb{P}(Y \in a\mathbb{N}^*)$, alors X et Y ont la même loi de probabilité.

Q 35. Préciser la loi de W . En considérant ℓ_1 , que peut-on alors en conclure ?

• • • FIN • • •
