A2017 – MATH I MP

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT Atlantique (ex Télécom Bretagne),
ENSAE PARISTECH.

Concours Centrale-Supelec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.

CONCOURS 2017

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 3 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Soit I un intervalle de la forme $[-a, a]$ où a est un réel strictement positif. Dans tout le problème, on considère les ensembles suivants :

- $\mathcal{E}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel constitué des applications de I dans $\mathbb{C}$ de classe C^∞ ;
- $\mathcal{D}$ la partie de $\mathcal{E}$ constituée de ses éléments développables en série entière sur un voisinage de 0 ;
- $\mathcal{P}$ la partie de $\mathcal{E}$ constituée de ses éléments polynomiaux.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$W_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n \,\mathrm{d}t$$

et si $f \in \mathcal{E}$, on note $u(f)$ et $v(f)$ les applications de I dans $\mathbb{C}$ définies par les formules :

$$(\forall x \in I) \qquad \begin{cases} u(f)(x) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi/2} f(x \sin t) \,\mathrm{d}t \\ \\ v(f)(x) = f(0) + x \displaystyle\int_0^{\pi/2} f'(x \sin t) \,\mathrm{d}t. \end{cases}$$

Les candidats devront justifier leurs affirmations.

A Préliminaires

1. Justifier que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{E}$.

2. Montrer que si $f \in \mathcal{E}$, $u(f)$ et $v(f)$ sont bien définies et appartiennent à $\mathcal{E}$, et que l'on définit ainsi des endomorphismes u et v de $\mathcal{E}$.

3. Montrer que $\mathcal{P}$ est stable par u et par v.

4. Établir pour $n \in \mathbb{N}$ une relation simple entre W_{n+2} et W_n. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}.$$

5. Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante. Déterminer sa limite et donner un équivalent de cette suite.

B Étude de la continuité de u et v

On considère la norme M de $\mathcal{E}$ définie pour tout $f \in \mathcal{E}$ par la formule

$$M(f) = \max_{x \in I} |f(x)|.$$

6. Vérifier que M est bien définie et montrer que u est une application continue de l'espace vectoriel normé $(\mathcal{E}, M)$ dans lui-même.

7. L'application v est-elle continue de $(\mathcal{E}, M)$ dans lui-même ?

8. Vérifier que l'application $N : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ définie par $N(f) = M(f) + M(f')$ est une norme sur $\mathcal{E}$, et montrer que v est continue de $(\mathcal{E}, N)$ dans $(\mathcal{E}, M)$. Les normes M et N sont-elles équivalentes ?

9. Si $f \in \mathcal{E}$ et $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe $p \in \mathcal{P}$ tel que $f(0) = p(0)$ et $|f'(x) - p'(x)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \in I$. En déduire que $\mathcal{P}$ est dense dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{E}, N)$.

C Étude de l'inversibilité de u et v

10. Déterminer les restrictions de $u \circ v$ et $v \circ u$ à $\mathcal{P}$.

11. Déterminer $(u \circ v)(f)$ pour tout $f \in \mathcal{E}$. Le réel 0 est-il valeur propre de l'endomorphisme v ?

12. Déterminer également $(v \circ u)(f)$ pour tout $f \in \mathcal{E}$. Conclure.

Applications.

13. Pour tout $f \in \mathcal{E}$, donner une relation liant $v(f)$ et $u(f')$. Calculer $u(\arctan')$ à l'aide du changement de variable $z = \tan t$ et en déduire $u(\operatorname{argsh}'')$.

14. Montrer que $f \in \mathcal{E}$ est paire (respectivement impaire) si et seulement si $u(f)$ l'est. Qu'en est-il pour v ?

D Étude des valeurs et vecteurs propres de u et v

15. Montrer que λ est une valeur propre de v si et seulement si $\frac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de u. Qu'en est-il des vecteurs propres correspondants ?

16. Montrer que $\mathcal{D}$ est stable par u. L'est-il par v ?

On considère une valeur propre λ de u, de vecteur propre associé $f \in \mathcal{E}$.

17. Vérifier que si $n \in \mathbb{N}$, le nombre $m_n = \max_{t \in I} |f^{(n)}(t)|$ est bien défini, et établir que pour tout $x \in I$,

$$|\lambda| \cdot |f^{(n)}(x)| \leqslant \frac{2 m_n W_n}{\pi}$$

En déduire que $f \in \mathcal{P}$.

18. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de u et v.

19. L'espace vectoriel $\mathcal{E}$ admet-il une base de vecteurs propres de u ? de v ? L'ensemble des valeurs propres de u (respectivement de v) est-il une partie fermée de $\mathbb{C}$?

Fin du problème