



Ce sujet comporte deux parties indépendantes.

## I Étude des torseurs

Les torseurs sont des outils mathématiques utilisés en mécanique du solide indéformable.

On considère un solide indéformable  $\Sigma$ . Si  $A$  est un point de ce solide et si  $\vec{V}(A)_{\mathcal{R}}$  désigne la vitesse du point  $A \in \Sigma$  dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ , il est bien connu que, pour tous points  $A$  et  $B$  de  $\Sigma$ , on a

$$\vec{V}(B)_{\mathcal{R}} = \vec{V}(A)_{\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\Sigma/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{AB}$$

où  $\vec{\Omega}_{\Sigma/\mathcal{R}}$  est un vecteur (un pseudo-vecteur en réalité) appelé *vecteur instantané de rotation* du solide  $\Sigma$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$ .

L'application  $A \mapsto \vec{V}(A)_{\mathcal{R}}$  est appelé *torseur cinématique*.

Cette partie se propose de dégager la théorie liée aux torseurs.

### Notations

- $\mathcal{E}$  désigne l'ensemble des points de l'espace géométrique orienté usuel de dimension 3 et on considère  $O$  un point fixé de  $\mathcal{E}$ .
- On note  $\vec{\mathcal{E}}$  l'ensemble des vecteurs de  $\mathcal{E}$  et on considère  $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  une base orthonormée directe de  $\vec{\mathcal{E}}$ .
- Le produit scalaire de deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  de  $\vec{\mathcal{E}}$  est noté  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ .
- Le produit vectoriel de deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  de  $\vec{\mathcal{E}}$  est noté  $\vec{u} \wedge \vec{v}$ .

On appelle *torseur* toute application  $\mathcal{M} : \mathcal{E} \rightarrow \vec{\mathcal{E}}$  pour laquelle il existe un vecteur  $\vec{r}$  tel que la relation  $\mathcal{M}(B) = \mathcal{M}(A) + \vec{r} \wedge \overrightarrow{AB}$  est vérifiée pour tous points  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{E}$ .

### I.A – L'espace $\mathcal{T}$ des torseurs

**I.A.1)** Soit  $\vec{r}$  un vecteur de  $\vec{\mathcal{E}}$ . Montrer que l'application  $\mathcal{M} : A \mapsto \vec{r} \wedge \overrightarrow{OA}$  est un torseur.

**I.A.2)** Montrer que l'ensemble  $\mathcal{T}$  des torseurs est un sous-espace vectoriel du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathcal{F}(\mathcal{E}, \vec{\mathcal{E}})$  des applications de  $\mathcal{E}$  dans  $\vec{\mathcal{E}}$ .

#### I.A.3)

a) Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de l'espace. Rappeler, sans démonstration, une condition géométrique nécessaire et suffisante pour que  $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ .

b) Soit  $\mathcal{M}$  un torseur. Montrer que le vecteur  $\vec{r}$  de la définition est unique.

Il s'appelle la *résultante* du torseur  $\mathcal{M}$ . On admet que l'application  $\begin{cases} \mathcal{T} \rightarrow \vec{\mathcal{E}} \\ \mathcal{M} \mapsto \vec{r} \end{cases}$  est linéaire.

**I.A.4)** Vérifier qu'une application constante de  $\mathcal{E}$  dans  $\vec{\mathcal{E}}$  est un torseur et en donner la résultante. Un tel torseur s'appelle un *couple*. Montrer que l'ensemble  $\mathcal{C}$  des couples est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{T}$  et que l'application  $\begin{cases} \mathcal{C} \rightarrow \vec{\mathcal{E}} \\ \mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}(O) \end{cases}$  est un isomorphisme.

En déduire la dimension de  $\mathcal{C}$ .

**I.A.5)** On appelle *glisseur* tout torseur qui s'annule en au moins un point de  $\mathcal{E}$ .

a) Soit  $O_1$  un point de  $\mathcal{E}$  distinct de  $O$  et  $\vec{r}$  un vecteur non nul et non colinéaire à  $\overrightarrow{OO_1}$ . On note  $g_0 : A \mapsto \vec{r} \wedge \overrightarrow{OA}$  et  $g_1 : A \mapsto \vec{r} \wedge \overrightarrow{O_1A}$ .

Montrer que  $g_0$  et  $g_1$  sont des glisseurs, mais que  $g_0 - g_1$  n'en est pas un. Expliquer pourquoi l'ensemble  $\mathcal{G}$  des glisseurs n'est pas un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{T}$ .

b) Montrer que l'ensemble  $\mathcal{G}_O$  des glisseurs s'annulant en  $O$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{T}$  et que l'application  $\begin{cases} \mathcal{G}_O \rightarrow \vec{\mathcal{E}} \\ \mathcal{M} \mapsto \vec{r} \end{cases}$ , où  $\vec{r}$  est la résultante de  $\mathcal{M}$ , est un isomorphisme.

En déduire la dimension de  $\mathcal{G}_O$ .

c) Démontrer que  $\mathcal{T} = \mathcal{C} \oplus \mathcal{G}_O$ . Quelle est la dimension de  $\mathcal{T}$  ?

## I.B – Équiprojectivité

**I.B.1)** Démontrer que, si  $\mathcal{M}$  est un torseur alors  $\mathcal{M}$  vérifie la propriété suivante :

$$\forall A, B \in \mathcal{E}, \quad \mathcal{M}(A) \cdot \overrightarrow{AB} = \mathcal{M}(B) \cdot \overrightarrow{AB}$$

Cette propriété est connue sous le nom de propriété d'équiprojectivité.

On se propose d'étudier la réciproque.

### I.B.2) Question préparatoire

a) Rappeler la définition d'une matrice antisymétrique.

b) L'espace est muni du repère orthonormé direct  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  et on identifie tout vecteur avec la matrice colonne  $3 \times 1$  contenant ses coordonnées dans la base  $\mathcal{B}$ .

Montrer qu'il existe un unique vecteur  $\vec{r}$ , dont on donnera les coordonnées dans la base  $\mathcal{B}$ , tel que

$$\forall \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \vec{\mathcal{E}}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{r} \wedge \vec{u}$$

**I.B.3)** Soit  $f : \vec{\mathcal{E}} \rightarrow \vec{\mathcal{E}}$  une application telle que pour tous vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ ,  $f(\vec{u}) \cdot \vec{v} = -\vec{u} \cdot f(\vec{v})$ .

a) Montrer que  $f$  est linéaire.

Pour  $\lambda$  et  $\mu$  deux nombres réels, on pourra considérer le vecteur  $\vec{w} = f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) - \lambda f(\vec{u}) - \mu f(\vec{v})$  et montrer qu'il est orthogonal à tout vecteur de  $\mathcal{E}$ .

b) Montrer que la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$  est une matrice antisymétrique.

c) Démontrer qu'il existe un unique vecteur  $\vec{r} \in \vec{\mathcal{E}}$  tel que pour tout  $\vec{u} \in \vec{\mathcal{E}}$ ,  $f(\vec{u}) = \vec{r} \wedge \vec{u}$ .

**I.B.4)** Soit  $\mathcal{M} : \mathcal{E} \rightarrow \vec{\mathcal{E}}$  une application vérifiant la propriété d'équiprojectivité. Montrer alors que  $\mathcal{M}$  est un torseur.

On pourra considérer l'application  $f : \vec{\mathcal{E}} \rightarrow \vec{\mathcal{E}}$  définie pour tout vecteur  $\vec{u} \in \vec{\mathcal{M}}$  par  $f(\vec{u}) = \mathcal{M}(O') - \mathcal{M}(O)$  où  $O'$  désigne le translaté du point  $O$  par le vecteur  $\vec{u}$  c'est-à-dire  $\overrightarrow{OO'} = \vec{u}$ .

## II Produits infinis

### II.A – Définitions et premières propriétés

Soient  $n_0 \in \mathbb{N}$  et  $(u_n)_{n \geq n_0}$  une suite de nombres réels ou complexes. Pour  $N \geq n_0$ , on pose

$$P_N = u_{n_0} u_{n_0+1} \cdots u_N = \prod_{n=n_0}^N u_n$$

La suite  $(P_N)_{N \geq n_0}$  est appelée *suite des produits partiels* associée à  $(u_n)_{n \geq n_0}$ .

On dit que le *produit infini*  $\prod_{n \geq n_0} u_n$  converge si la suite  $(P_N)_{N \geq n_0}$  admet une limite finie **non nulle**. Cette limite

est notée  $\prod_{n=n_0}^{+\infty} u_n$  et est appelée *valeur* du produit infini. Si  $(P_N)_{N \geq n_0}$  est divergente ou de limite nulle, on dit

que le *produit infini*  $\prod_{n \geq n_0} u_n$  diverge.

#### II.A.1) Produits télescopiques

a) Montrer que  $\prod_{n=2}^N \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{N}$ .

En déduire la divergence du produit infini  $\prod_{n \geq 2} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ .

b) Justifier que  $\prod_{n=2}^N \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \left(\prod_{n=2}^N \frac{n-1}{n}\right) \left(\prod_{n=2}^N \frac{n+1}{n}\right)$ .

En déduire la convergence et la valeur du produit infini  $\prod_{n \geq 2} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ .

#### II.A.2) Conditions nécessaires de convergence

a) Montrer que si  $\prod_{n \geq n_0} u_n$  converge alors pour tout  $n \geq n_0$ ,  $u_n \neq 0$ .

b) Montrer, en considérant le quotient  $\frac{P_{N+1}}{P_N}$  que si  $\prod_{n \geq n_0} u_n$  converge alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ .

c) La condition  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$  est-elle suffisante pour que le produit infini  $\prod_{n \geq n_0} u_n$  converge ?

**II.A.3)** On suppose dans cette question que  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est une suite de réels strictement positifs.

a) Montrer que le produit infini  $\prod_{n \geq n_0} u_n$  converge si et seulement si la série  $\sum_{n \geq n_0} \ln(u_n)$  converge. Préciser alors

la relation entre  $\prod_{n=n_0}^{+\infty} u_n$  et  $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \ln(u_n)$ .

b) Montrer que si, pour tout  $n \geq n_0$ ,  $0 < u_n < 1$  alors le produit infini  $\prod_{n \geq n_0} (1 - u_n)$  converge si et seulement si la série  $\sum_{n \geq n_0} u_n$  converge.

c) Soit  $q$  un nombre réel appartenant à  $[0, 1[$  quelle est la nature du produit infini  $\prod_{n \geq 1} (1 - q^n)$  ?

## II.B – Développement en produit infini de $\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$

On se propose dans cette sous-partie de démontrer que

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad \sin(\pi x) = \pi x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$$

**II.B.1)** Expliquer pourquoi il suffit de démontrer cette égalité pour tout  $x \in ]0, 1[$ .

Dans toute la suite de cette sous-partie II.B,  $x$  est un réel fixé appartenant à l'intervalle  $]0, 1[$ .

**II.B.2)** Prouver la convergence du produit infini  $\prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$ .

**II.B.3)**

a) Montrer que pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$ .

b) On définit la fonction  $f$ ,  $2\pi$ -périodique, par  $\forall t \in ]-\pi, \pi], f(t) = \cos(xt)$ .

Représenter graphiquement la fonction  $f$  dans le cas particulier où  $x = 1/2$ .

Dans le cas général où  $x \in ]-1, 1[$ , démontrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et  $C^1$  par morceaux.

Calculer les coefficients de Fourier de  $f$ .

c) En déduire, pour tout  $t \in [-\pi, \pi]$ , l'égalité

$$\cos(xt) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi} \left( \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2x}{x^2 - n^2} \cos(nt) \right)$$

d) Pour tout  $t \in \mathbb{R}$  tel que  $\sin t \neq 0$  on pose  $\cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$ . Montrer que,

$$\pi \cot(\pi x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2}$$

**II.B.4)**

a) À l'aide d'un développement limité en 0 de  $u \cos u - \sin u$ , calculer  $\lim_{t \rightarrow 0} \left( \pi \cot(\pi t) - \frac{1}{t} \right)$ . En déduire la

convergence de l'intégrale  $I = \int_0^x \left( \pi \cot(\pi t) - \frac{1}{t} \right) dt$ .

b) Prouver l'existence et calculer la limite de  $\ln \left( \frac{\sin(\pi \epsilon)}{\pi \epsilon} \right)$  quand  $\epsilon$  tend vers 0.

c) En déduire que  $I = \ln \left( \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \right)$ .

d) Expliquer pourquoi la quantité  $\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{2t}{n^2 - t^2}$  est définie pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$  et tout  $t \in [0, 1]$ .

e) Justifier que  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{2}{n^2 - 1} = 0$ .

f) Montrer que

$$\forall t \in [0, 1[, \forall N \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{2t}{n^2 - t^2} \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{2}{n^2 - 1}$$

g) Montrer que, pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\left| \ln \left( \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \right) - \sum_{n=1}^N \int_0^x \frac{2t}{t^2 - n^2} dt \right| \leq x \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{2}{n^2 - 1}$$

h) En déduire le développement en produit infini de  $\sin(\pi x)$ .

### II.B.5) Deux applications

a)

i. Justifier la convergence du produit infini  $\prod_{n \geq 1} \left( 1 - \frac{1}{4n^2} \right)$ .

ii. À l'aide du développement en produit infini de  $\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$  appliqué à un réel  $x$  bien choisi, donner la valeur du produit infini  $\prod_{n \geq 1} \left( 1 - \frac{1}{4n^2} \right)$ .

b) On introduit la *fonction  $\zeta$  de Riemann* donnée par  $\zeta(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a}$ .

i. Prouver que  $\zeta$  est définie sur  $]1, +\infty[$ .

ii. Écrire le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction  $x \mapsto \sin(\pi x)$ .

iii. On trouve dans les travaux d'Euler un « calcul formel » permettant d'obtenir la valeur de  $\zeta(2)$ . Il identifie les termes de degré 3 du développement limité de  $x \mapsto \sin(\pi x)$  et de son développement en produit infini. Conjecturer la valeur de  $\zeta(2)$  en utilisant cette méthode.

---

• • • FIN • • •

---