Mathématiques 2

TSI

2016

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures — Calculatrices autorisées

Notations

- $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices à coefficients réels ayant 3 lignes et 3 colonnes.
- $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ désigne le sous-ensemble de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ formé des matrices inversibles.
- $\mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ désigne le sous-ensemble de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ formé des matrices orthogonales.
- I_3 est la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- Le polynôme caractéristique d'une matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est $\chi_A(X) = \det(XI_3 - A)$.
- $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices à coefficients réels ayant 3 lignes et 1 colonne.
- La norme euclidienne d'un élément $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, égale à $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, est notée $\|u\|$.
- On rappelle qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est bornée s'il existe une constante $C \geqslant 0$ indépendante de n telle que $\|u_n\| \leqslant C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ converge vers $\ell \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ si $\lim\limits_{n\to+\infty} \|u_n - \ell\| = 0$.
- Pour $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $\mathrm{Sp}(A)$ désigne l'ensemble des valeurs propres complexes de A et $\rho(A)$ le maximum des modules des valeurs propres de A ; on appelle $\rho(A)$ le rayon spectral de A.
  On a donc $\rho(A) = \max\{|\lambda| \,;\, \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$.
- $T_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui vérifient $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}$ (autrement dit, l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont toutes les valeurs propres sont réelles).

Objectif du problème

L'objectif du problème est d'étudier le comportement asymptotique d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ vérifiant une relation de récurrence $u_{n+1} = Au_n$, où A est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, en fonction de la condition initiale u_0 et du rayon spectral $\rho(A)$.

Les quatre parties du problème sont largement indépendantes entre elles.

I Généralités

I.A – *Cas des matrices orthogonales*

On considère une matrice orthogonale $A \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ et un vecteur $u \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la condition initiale $u_0 = u$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = Au_n$, valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

I.A.1) Exprimer $\|u_{n+1}\|$ en fonction de $\|u_n\|$ et justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

I.A.2) À quelle condition, portant sur le vecteur u, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle vers $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$?

I.A.3) Que peut-on dire des valeurs propres d'une matrice A qui appartient à la fois à $\mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ et à $T_3(\mathbb{R})$? En déduire la description de tous les éléments de $\mathrm{O}_3(\mathbb{R}) \cap T_3(\mathbb{R})$.

I.B – *Étude d'un exemple*

Pour $s \in \mathbb{R}$, on définit la matrice $B_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s \\ 0 & s^2 & 0 \end{pmatrix}$.

I.B.1) Pour quelles valeurs du paramètre s la matrice B_s appartient-elle à $\mathrm{O}_3(\mathbb{R})$? Pour ces valeurs de s, donner une description géométrique de l'endomorphisme associé à B_s dans la base canonique.

I.B.2) Pour quelles valeurs du paramètre s la matrice B_s appartient-elle à $T_3(\mathbb{R})$? Que vaut alors son rayon spectral $\rho(B_s)$?

I.B.3) Pour tout entier $\ell \geqslant 1$, calculer la matrice $B_s^{2\ell}$.

I.B.4) Déduire des deux questions précédentes qu'il existe $A \in T_3(\mathbb{R})$ et $u \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tels que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la condition initiale $u_0 = u$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = Au_n$ ne soit pas bornée dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

II Un exemple issu des probabilités

Deux personnes sont perdues dans un labyrinthe composé de cinq pièces disposées comme indiqué sur le dessin de la figure 1. Chaque pièce est reliée aux deux pièces voisines par un couloir. Les couloirs sont représentés par les segments du dessin.

À l'instant $n = 0$, les deux personnes se situent dans deux pièces voisines (par exemple les pièces 1 et 2). Elles partent alors à la recherche l'une de l'autre selon les règles suivantes :

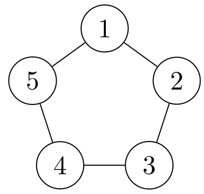

Figure 1

- à partir d'une pièce, chacune peut aller dans l'une ou l'autre des deux pièces voisines, les deux possibilités étant de probabilité 1/2 ;
- les déplacements des deux personnes se font simultanément ;
- les choix des déplacements sont indépendants les uns des autres ;
- on suppose que les deux personnes ne peuvent ni se retrouver ni se voir dans les couloirs qui relient entre elles les différentes pièces ;
- les deux personnes se déplacent jusqu'à se retrouver dans une même pièce ; une fois qu'elles se sont retrouvées, elles restent ensemble lors de leurs déplacements futurs.

Pour tout entier naturel n on note :

- A_n l'événement « les deux personnes sont dans la même pièce après n déplacements » et $a_n = P(A_n)$;
- B_n l'événement « les deux personnes sont dans des pièces voisines (par exemple les pièces 1 et 2 ou 1 et 5) après n déplacements » et $b_n = P(B_n)$;
- C_n l'événement « les deux personnes sont dans des pièces non voisines (par exemple les pièces 1 et 3 ou 1 et 4) après n déplacements » et $c_n = P(C_n)$.

II.A – Donner les valeurs de a_0, b_0 et c_0.

II.B – Soit n un entier naturel. Déterminer la probabilité conditionnelle $P_{A_n}(A_{n+1})$ de A_{n+1} sachant A_n. Calculer de même les probabilités conditionnelles $P_{B_n}(A_{n+1})$ et $P_{C_n}(A_{n+1})$.

II.C – En déduire l'égalité $P(A_{n+1}) = P(A_n) + \dfrac{1}{4}P(C_n)$.

II.D – Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{4}c_n$, $b_{n+1} = \dfrac{3}{4}b_n + \dfrac{1}{4}c_n$ et $c_{n+1} = \dfrac{1}{4}b_n + \dfrac{1}{2}c_n$.

II.E – On note $u_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice A telle que la relation $u_{n+1} = Au_n$ soit vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$.

II.F – On se propose de déterminer l'expression des trois suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

II.F.1) Montrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence linéaire d'ordre 2

$$b_{n+2} = \frac{5}{4}b_{n+1} - \frac{5}{16}b_n$$

II.F.2) En déduire l'expression de b_n, puis celles de c_n et de a_n en fonction de n.

II.F.3) Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont-elles convergentes ? Si oui, préciser leurs limites et en donner une interprétation.

II.G – Soit X la variable aléatoire égale au nombre de déplacements nécessaires pour que les deux personnes se retrouvent pour la première fois.

II.G.1) Quelles sont les valeurs prises par X ?

II.G.2) Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, exprimer l'événement $(X = n)$ en fonction de A_n et C_{n-1}.

II.G.3) Donner la loi de X.

Justifier que pour $x \in]-1, 1[$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$.

Calculer l'espérance de X.

Comment peut-on l'interpréter dans le cadre du problème du labyrinthe.

III Rayon spectral

III.A – ***Quelques résultats intermédiaires***

Dans cette sous-partie, on fixe un nombre réel $\mu \geqslant 0$ et deux matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ vérifiant pour tout $w \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $\|P^{-1}APw\| \leqslant \mu\|w\|$.

III.A.1) Démontrer l'inégalité $\|P^{-1}A^{n+1}Pw\| \leqslant \mu\|P^{-1}A^nPw\|$, pour tout entier $n \geqslant 1$ et toute matrice $w \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. En déduire que $\|P^{-1}A^nPw\| \leqslant \mu^n\|w\|$.

III.A.2)

a) Justifier brièvement l'inégalité

$$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \qquad \left\| P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\| \leqslant |x| \left\| P\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| + |y| \left\| P\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| + |z| \left\| P\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|$$

b) Pour $P=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$, on pose $C(P)=\sqrt{p_{11}^2+p_{21}^2+p_{31}^2+p_{12}^2+p_{22}^2+p_{32}^2+p_{13}^2+p_{23}^2+p_{33}^2}$.

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à des vecteurs bien choisis, démontrer l'inégalité

$$\forall w \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \qquad \|Pw\| \leqslant C(P)\|w\|$$

III.A.3) Déduire de ce qui précède l'inégalité $\|A^n Pw\| \leqslant C(P)\mu^n\|w\|$, valable pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $w \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

On considère à présent un vecteur $u \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et la suite définie par la condition initiale $u_0 = u$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = A\,u_n$, valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

III.A.4) En introduisant $w = P^{-1}u$, démontrer l'inégalité $\|u_n\| \leqslant C(P^{-1})C(P)\mu^n\|u\|$, valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

III.A.5)

a) Dans le cas où $0 \leqslant \mu \leqslant 1$, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

b) Dans le cas où $0 \leqslant \mu < 1$, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

III.B – Cas d'une matrice diagonalisable

On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D=\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

III.B.1) Justifier l'égalité $\rho(A)=\rho(P^{-1}AP)$, valable pour toute matrice $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$.

III.B.2) Préciser le rayon spectral $\rho(D)$ de la matrice D.

III.B.3) Pour tout $w \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, démontrer l'inégalité $\|Dw\| \leqslant \rho(D)\|w\|$.

On suppose dans la suite de cette sous-partie que que A est *diagonalisable* sur $\mathbb{R}$ et on considère un vecteur $u \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Comme précédemment, on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la condition initiale $u_0 = u$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = A\,u_n$, valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

III.B.4) Expliquer pourquoi il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que l'on a l'inégalité $\|P^{-1}APw\| \leqslant \rho(A)\|w\|$ pour tout $w \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

III.B.5) En déduire que si $\rho(A) \leqslant 1$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

III.B.6) Le résultat de la question précédente est-il cohérent avec la question II.F.3 ? Justifier la réponse.

III.B.7) Que dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $\rho(A) < 1$?

III.C – Optimalité de l'hypothèse $\rho(A) < 1$ *dans le cas général*

III.C.1) On définit la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Que vaut $\rho(A)$? A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$?

III.C.2) Donner l'expression de A^ℓ, valable pour tout $\ell \in \mathbb{N}^\star$.

III.C.3) Comme précédemment, pour $u \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la condition initiale $u_0 = u$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = Au_n$.

Démontrer qu'il existe $u \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne soit pas bornée dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

III.D – Cas d'une matrice $A \in T_3(\mathbb{R})$ *avec* $\rho(A) < 1$

Dans toute cette sous-partie, A désigne une matrice de $T_3(\mathbb{R})$ qui vérifie l'hypothèse $\rho(A) < 1$.

III.D.1)

a) Expliquer pourquoi il existe une matrice triangulaire supérieure $T=\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ 0 & t_{22} & t_{23} \\ 0 & 0 & t_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice $Q \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telles que $Q^{-1}AQ = T$.

b) Exprimer le rayon spectral $\rho(A)$ en fonction des coefficients de la matrice T.

III.D.2)

a) En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, démontrer l'inégalité $(ay+bz)^2 \leqslant (a^2+b^2)(y^2+z^2)$, valable pour tout vecteur $(a,b,y,z) \in \mathbb{R}^4$.

b) En déduire, pour tous vecteurs $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et $(y,z) \in \mathbb{R}^2$, l'inégalité $(ay+bz)^2+c^2z^2 \leqslant (a^2+b^2+c^2)(y^2+z^2)$.

III.D.3)

a) En notant $D = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 & 0 \\ 0 & t_{22} & 0 \\ 0 & 0 & t_{33} \end{pmatrix}$, justifier l'inégalité $\|Tw\| \leqslant \|Dw\| + \|(T-D)w\|$, valable pour tout $w \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

b) Démontrer l'inégalité $\|Tw\| \leqslant \left(\rho(A) + \sqrt{t_{12}^2 + t_{13}^2 + t_{23}^2}\right) \|w\|$.

III.D.4)

a) Soit δ un réel strictement positif. Justifier que la matrice $\Delta_\delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & \delta^2 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer la matrice $\Delta_\delta^{-1} T \Delta_\delta$.

b) Démontrer l'inégalité $\|\Delta_\delta^{-1} T \Delta_\delta w\| \leqslant \left(\rho(A) + \sqrt{\delta^2 t_{12}^2 + \delta^4 t_{13}^2 + \delta^2 t_{23}^2}\right) \|w\|$.

III.D.5) Comme précédemment, pour tout vecteur $u \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la condition initiale $u_0 = u$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = Au_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En exploitant l'hypothèse $\rho(A) < 1$ et la question III.A.5b, démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On pourra poser $P = Q\Delta_\delta$ pour un δ bien choisi.

IV Méthode de Jacobi

On s'intéresse dans cette partie à l'équation $MX = B$, avec les notations suivantes :
- $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est un vecteur inconnu ;
- $M = \left(m_{ij}\right)_{(i,j)}$ est une matrice de $T_3(\mathbb{R}) \cap \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ dont aucun élément diagonal n'est nul ;
- $B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ est un élément de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

La méthode de Jacobi consiste à calculer une solution approchée de la solution exacte de l'équation $MX = B$. On admettra le résultat suivant, plus fort que celui obtenu dans la partie précédente : si A est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $\rho(A) < 1$, alors pour tout $u \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la condition initiale $u_0 = u$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = Au_n$ converge vers $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Partant d'un vecteur $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{1}{m_{11}}(-m_{12}y_n - m_{13}z_n + \alpha) \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{m_{22}}(-m_{21}x_n - m_{23}z_n + \beta) \\ z_{n+1} = \dfrac{1}{m_{33}}(-m_{31}x_n - m_{32}y_n + \gamma) \end{cases}$$

IV.A – Prouver qu'il existe une matrice D diagonale et inversible telle que $X_{n+1} = (I - D^{-1}M)X_n + D^{-1}B$.

IV.B – Justifier l'existence et l'unicité de $\tilde{X} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, solution exacte de l'équation $MX = B$.

IV.C – Démontrer que $X_{n+1} - \tilde{X} = (I - D^{-1}M)(X_n - \tilde{X})$.

IV.D – En déduire que si $\rho(I - D^{-1}M) < 1$ la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\tilde{X}$.

IV.E – Pour chacun des deux exemples ci-dessous, calculer $\tilde{X}$ et $\rho(I - D^{-1}M)$

$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 1 \\ 0 & 2 & 10 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}$ et $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 10 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}$ et $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

IV.F – Pour chacun des deux exemples, calculer X_1, X_2, X_3, X_4 et commenter les résultats obtenus.

• • • FIN • • •