A 2015 MATH. I MP

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
SUPAÉRO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TÉLÉCOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES DE SAINT-ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (FILIÈRE MP),
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI).

CONCOURS 2015

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière MP

(Durée de l'épreuve : 3 heures)
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
CYCLE INTERNATIONAL, ENSTIM, TÉLÉCOM INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - MP.

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'objectif de ce problème est l'étude d'un opérateur de Volterra appliqué notamment à la résolution de certaines équations différentielles.

On considère l'espace vectoriel E des fonctions réelles définies et continues sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$, muni du produit scalaire défini pour tous f, g dans E par :

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)g(t)\, \mathrm{d}t.$$

On note $\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$ la norme associée à ce produit scalaire. Un endomorphisme V de l'espace E est dit *symétrique défini positif* si pour tous f, g dans E, on a $\langle V(f), g\rangle = \langle f, V(g)\rangle$ et si de plus, $\langle V(f), f\rangle > 0$ pour tout $f \in E$ non nul.

Les parties **A** *et* **B** *sont mutuellement indépendantes.*

A. Opérateur de Volterra

On note V et V^* les endomorphismes de E défini par les formules :

$$V(f)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$
$$V^*(f)(x) = \int_x^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t$$

pour tous $f \in E$ et $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

1) En observant que $V(f)$ et $-V^*(f)$ sont des primitives de f, montrer que pour tous f, g dans E, on a $\langle V(f), g\rangle = \langle f, V^*(g)\rangle$.

2) Montrer que l'endomorphisme $V^* \circ V$ est symétrique défini positif. En déduire que ses valeurs propres sont strictement positives.

Soit λ une valeur propre de $V^* \circ V$ et f_λ un vecteur propre associé à λ.

3) Montrer que f_λ est de classe C^2 et est solution de l'équation différentielle : $y'' + \frac{1}{\lambda} y = 0$ avec les conditions $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $y'(0) = 0$.

4) En déduire que λ est une valeur propre de $V^* \circ V$ si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda = \frac{1}{(2n+1)^2}$. Préciser alors les vecteurs propres associés.

B. Théorème d'approximation de Weierstrass

Soit n un entier strictement positif, $x \in [0,1]$ et $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On note $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et distribuées selon la loi de Bernoulli de paramètre x. On note également $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, $Z_n = \frac{S_n}{n}$ et $B_n(f)(x) = E\big(f(Z_n)\big)$.

5) Rappeler, sans démonstration, la loi de S_n. En déduire, avec démonstration, les valeurs de l'espérance et de la variance de S_n en fonction de n et de x.

6) En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que pour tout $\alpha > 0$:

$$\sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ |\frac{k}{n} - x| \geqslant \alpha}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{4n\alpha^2}$$

7) Montrer que :

$$B_n(f)(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \Big(f\big(\frac{k}{n}\big) - f(x) \Big)$$

et en déduire que la suite $(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$. On pourra utiliser le résultat de la question précédente ainsi que le théorème de Heine.

On a donc établi le *théorème d'approximation de Weierstrass* sur le segment $[0,1]$: toute fonction continue sur $[0,1]$ y est limite uniforme d'une suite de polynômes. On en déduit aisément, et on l'admet, le théorème d'approximation de Weierstrass sur un segment quelconque $[a,b]$.

C. Développement de $V^* \circ V(f)$ en série trigonométrique

On considère maintenant l'espace vectoriel G des fonctions réelles définies et continues sur l'intervalle $[0,\pi]$, muni du produit scalaire défini pour tous f, g dans G par :

$$\langle f, g \rangle_G = \int_0^\pi f(t) g(t) \, \mathrm{d}t.$$

On note $\|f\|_G = \sqrt{\langle f, f \rangle_G}$ la norme associée à ce produit scalaire.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $c_n \in G$ par la formule $c_n(t) = \cos(nt)$ et on note $F_n = \mathrm{Vect}(c_0, c_1, \dots, c_n)$ le sous-espace vectoriel de G engendré par $\{c_0, c_1, \dots, c_n\}$. On note également P_{F_n} la projection orthogonale de G sur F_n.

8) Montrer que si p est un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto p(\cos(t))$ définie sur $[0,\pi]$ appartient à F_n.

9) Trouver une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels strictement positifs telle que la suite $(\alpha_n c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit orthonormée. Déduire du théorème d'approximation de Weierstrass que la suite orthonormée $(\alpha_n c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est totale.

10) Soit $f \in G$. Démontrer que $\|f - P_{F_n}(f)\|_G$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Si, de plus, la suite $(P_{F_n}(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,\pi]$ vers une fonction g, montrer que $g = f$.

Pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on définit la fonction g_x sur $[0,\pi]$ par la formule :

$$g_x(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \max(x,t) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2} \\ -g_x(\pi - t) & \text{si } \frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \pi. \end{cases}$$

11) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer les coordonnées de $P_{F_n}(g_x)$ sur la base $(c_0, c_1, \ldots, c_n)$ de F_n. En déduire que pour tout $t \in [0, \pi/2]$:

$$\frac{\pi}{2} - \max(x,t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos\big((2n+1)x\big)}{(2n+1)^2} \cos\big((2n+1)t\big).$$

12) Montrer que pour tous $f \in E$ et $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$:

$$V^* \circ V(f)(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\frac{\pi}{2} - \max(x,t)\Big) f(t)\,\mathrm{d}t$$

et en déduire la suite des coefficients $(a_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle on a :

$$V^* \circ V(f)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(f) \cos\big((2n+1)x\big).$$

D. Équations différentielles du type Sturm-Liouville

Soit $h \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et l'équation différentielle :

$$S \quad \begin{cases} y'' + \lambda y + h = 0 \\ y(\pi/2) = 0 \text{ et } y'(0) = 0 \end{cases}$$

On définit $\varphi_n \in E$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ par la formule $\varphi_n(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cos\big((2n+1)t\big)$.

13) Montrer que pour tous $f \in E$ et $n \in \mathbb{N}$, $\langle V^* \circ V(f), \varphi_n\rangle = \dfrac{1}{(2n+1)^2}\langle f, \varphi_n\rangle$.

14) Montrer que g est solution de l'équation différentielle S si et seulement si $g = \lambda \cdot V^* \circ V(g) + V^* \circ V(h)$ et que dans ce cas, on a les formules suivantes pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\Big(1 - \frac{\lambda}{(2n+1)^2}\Big)\langle g, \varphi_n\rangle = \frac{1}{(2n+1)^2}\langle h, \varphi_n\rangle$$

et

$$g = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle g, \varphi_n \rangle \varphi_n.$$

15) On suppose dans cette question que λ n'est *pas* égal au carré d'un entier impair. Montrer que la série :

$$\sum \frac{1}{(2n+1)^2 - \lambda} \langle h, \varphi_n \rangle \varphi_n$$

est normalement convergente. Exhiber alors une solution de S.

On suppose maintenant qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda = (2p+1)^2$.

16) Montrer que si $\langle h, \varphi_p \rangle = 0$ alors S a une infinité de solutions, puis exhiber l'une d'entre elles. Que peut-on dire si $\langle h, \varphi_p \rangle \neq 0$?

FIN DU PROBLÈME