A 2014 MATH II PSI

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH.
SUPAERO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH
MINES DE SAINT ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (Filière MP).
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS 2014

SECONDE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière PSI

(Durée de l'épreuve : trois heures)
L'usage d'ordinateur ou de calculatrice est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
Cycle international, ENSTIM, TELECOM INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - PSI

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Racine de l'opposé du Laplacien
et
Equation de la chaleur généralisée

Notations

On note $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbf{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs, $\mathbf{R}$ l'ensemble des nombres réels, $\mathbf{N}^*$ l'ensemble des nombres entiers strictement positifs, $\mathbf{R}^-$ l'ensemble des nombres réels négatifs ou nuls, $\mathbf{R}^+$ l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls et $\mathbf{R}^{+*}$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

On note $\mathscr{C}_\#^k$ l'ensemble des fonctions $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ de classe $\mathscr{C}^k$, de période 2π, où $k \in [0, \infty]$, et pour $f \in \mathscr{C}_\#^0$, on note $\left\|f\right\| = \sup_{x\in[0,2\pi]} \left|f(x)\right|$.

On note e_n la fonction $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ définie par $e_n(x) = e^{inx}$, et pour $f \in \mathscr{C}_\#^0$,

$$c_n\left(f\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\, e_{-n}(\theta)\,\mathrm{d}\theta,\ n \in \mathbf{Z}. \tag{1}$$

Lorsqu'une série est absolument convergente, on montre que sa somme ne dépend pas de l'ordre des termes, ce qui justifie d'écrire

$$d_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} d_{-n} + \sum_{n=1}^{+\infty} d_n = \sum_{n\in\mathbf{Z}} d_n$$

et de dire que la série $\sum_{n\in\mathbf{Z}} d_n$ converge absolument si et seulement si les séries $\sum_{n=1}^{+\infty} d_{-n}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} d_n$ convergent absolument.

1 Séries trigonométriques

Question 1 *Soit $f \in \mathscr{C}_\#^0$, démontrer que la suite des $c_n\left(f\right)$ où $n \in \mathbf{Z}$, est bornée.*

Question 2 *Soit $f \in \mathscr{C}_\#^\infty$, donner l'expression de $c_n\left(f^{(k)}\right)$ en fonction de $c_n\left(f\right)$. En déduire que pour tout $k \in \mathbf{N}$, il existe $C_k > 0$ tel que, pour tout entier relatif non nul n*

$$\left|c_n\left(f\right)\right| \leq \frac{C_k}{|n|^k}. \tag{2}$$

Soit $\left(d_n\right)_{n\in\mathbf{Z}}$, une suite d'éléments de $\mathbf{C}$, telle que la série $\sum_{n\in\mathbf{Z}} d_n$ converge absolument.

Question 3 *Montrer que pour tout x réel la série $\sum_{n\in\mathbf{Z}} d_n e_n(x)$ converge et que sa somme $h(x)$ appartient à $\mathscr{C}_\#^0$. Justifier que, pour tout $n \in \mathbf{Z}$ $d_n = c_n(h)$.*

Réciproquement, on suppose pour cette question que quel que soit l'entier k, il existe $C_k > 0$ et $N_k \geq 1$ tels que

$$\left|d_n\right| \leq \frac{C_k}{|n|^k}\ \forall\, |n| \geq N_k.$$

Question 4 *Démontrer que pour tout ℓ entier, la série $\sum_{n\in\mathbf{Z}} d_n e_n^{(\ell)}$ converge normalement ; en déduire que $h(x)=\sum_{n\in\mathbf{Z}} d_n e_n(x)$ appartient à $\mathscr{C}_\#^\infty$.*

Un opérateur différentiel sur $\mathscr{C}_\#^\infty$ est une application linéaire B de $\mathscr{C}_\#^\infty$ dans lui-même de la forme suivante :

$$Bf=\sum_{k=0}^{\infty} b_k f^{(k)},$$

où les réels b_k sont tous nuls sauf un nombre fini. On appelle ordre de B l'entier K défini par $K=\max\left\{k\in\mathbf{N}\,\middle|\,b_k\neq 0\right\}$.

Question 5 *Démontrer qu'une application linéaire B de $\mathscr{C}_\#^\infty$ dans lui-même est un opérateur différentiel d'ordre K si et seulement si il existe un polynôme P_K d'ordre K tel que, pour tout entier relatif n, et pour tout $f\in\mathscr{C}_\#^\infty$, $c_n\left(Bf\right)=P_K(n)\,c_n\left(f\right)$.*

2 Equation de la chaleur généralisée

Soit ρ une fonction $:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$, strictement croissante, telle qu'il existe $\ell\in\mathbf{N}^+$ avec

$$\forall y\geq 1,\ y\leq\rho\left(y\right)\leq y^\ell.$$

Question 6 *Soit $f\in\mathscr{C}_\#^\infty$, démontrer que la série $\sum_{n\in\mathbf{Z}}\rho\left(|n|\right)c_n\left(f\right)e_n$ converge normalement et que sa somme appartient à $\mathscr{C}_\#^\infty$.*

Question 7 *Soit $f\in\mathscr{C}_\#^0$, démontrer que pour tout $t>0$, la série $\sum_{n\in\mathbf{Z}}e^{-t\rho(|n|)}c_n\left(f\right)e_n$ converge normalement et que sa somme appartient à $\mathscr{C}_\#^\infty$.*

On définit l'opérateur $A\,:\,\mathscr{C}_\#^\infty\longrightarrow\mathscr{C}_\#^\infty$ par la formule

$$A\left(f\right)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}\rho\left(|n|\right)c_n\left(f\right)e_n. \tag{3}$$

On suppose désormais que $t\in R^{+*}$,

et on définit l'opérateur Q_t sur $\mathscr{C}_\#^0$ par la formule suivante :

$$Q_t\left(f\right)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}e^{-t\rho(|n|)}c_n\left(f\right)e_n. \tag{4}$$

Question 8 *Montrer que pour x réel fixé et $f\in\mathscr{C}_\#^0$, la fonction $t\longmapsto Q_t\left(f\right)(x)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}^{+*}$.*

Question 9 *Démontrer que, pour $f\in\mathscr{C}_\#^0$ et $t>0$,*

$$\frac{\partial}{\partial t}Q_t\left(f\right)(x)=-A\left(Q_t\left(f\right)\right)(x)\ \ \forall x\in\mathbf{R}. \tag{5}$$

On note I l'opérateur identité de $\mathscr{C}_{\#}^{\infty}$.

Question 10 *Soit $\alpha \in \mathbf{C}$, $\alpha \notin \mathbf{R}^{-}$. Montrer que pour tout $g \in \mathscr{C}_{\#}^{\infty}$ il existe un et un seul élément, noté u, appartenant à $\mathscr{C}_{\#}^{\infty}$ qui soit solution de l'équation $(A+\alpha I)u = g$.*

Question 11 *Montrer que pour $\mathfrak{Re}\, \alpha > 0$ et $g \in \mathscr{C}_{\#}^{\infty}$, et pour tout x réel,*

$$(A+\alpha I)^{-1}\big(g\big)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} Q_t\big(g\big)(x)\,\mathrm{d}t.$$

Question 12 *Déterminer les valeurs propres de A, c'est-à-dire les λ complexes tels qu'il existe $g \neq 0$ vérifiant $A\big(g\big) = \lambda g$.*

3 Représentations intégrales

Dans ce paragraphe on s'intéresse à deux occurences particulières de la fonction ρ : ρ_1 et ρ_2 définies sur $\mathbf{R}^{+}$ par $\rho_1\big(y\big) = y$ et $\rho_2\big(y\big) = y^2$. On pose

$$A^1\big(f\big) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|\, c_n\big(f\big)\, e_n \text{ et } A^2\big(f\big) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 c_n\big(f\big)\, e_n, \tag{6}$$

ainsi que

$$Q_t^1\big(f\big) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-t|n|} c_n\big(f\big)\, e_n, \text{ et } Q_t^2\big(f\big) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-tn^2} c_n\big(f\big)\, e_n. \tag{7}$$

Question 13 *Démontrer que si $f \in C_{\#}^{\infty}$, $\big(A^1 \circ A^1\big)\big(f\big) = A^2\big(f\big)$.*

Question 14 *Démontrer que A^2 est un opérateur différentiel et en donner l'expression. En est-il de même pour A^1 ?*

Question 15 *En référence aux résultats des questions* **13** *et* **9***, justifier le titre du document.*

Si g est une fonction continue et intégrable sur $\mathbf{R}$, on pose

$$\mathscr{F}\big(g\big)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} g(x)\,\mathrm{d}x, \tag{8}$$

où $\omega \in \mathbf{R}$; c'est la transformée de Fourier de f.

On admettra les formules suivantes :

$$\mathscr{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|\omega|} \text{ et } \mathscr{F}\left(e^{-x^2/2}\right)(\omega) = e^{-\omega^2/2}. \tag{9}$$

Question 16 *Déterminer le réel α tel que, pour tout $f \in \mathscr{C}_{\#}^{\infty}$, pour tout y réel et tout $t \in \mathbf{R}^{+*}$,*

$$Q_t^1\big(f\big)\big(y\big) = \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{t^2+x^2} f\big(y-x\big)\,\mathrm{d}x.$$

4 Données initiales continues

On suppose dans ce paragraphe que $f \in \mathscr{C}^0_\#$, et on se limite à l'étude de $Q^1_t\left(f\right)$.

On rappelle le théorème de Weierstrass trigonométrique : pour toute fonction f continue T-périodique et tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme trigonométrique p, soit

$$p\left(t\right) = \sum_{n \in \mathbf{Z}_N} c_n e^{2i\pi n t/T} \text{ où } c_n \in \mathbf{C}, \text{ et } \mathbf{Z}_N = \{n \in \mathbf{Z} \,|\, -N \leq n \leq N\},$$

tel que $\left\|f - p\right\| \leq \varepsilon$.

Question 17 *En s'aidant du théorème ci-dessus, montrer que pour tout y réel et tout t réel strictement positif*

$$Q^1_t\left(f\right)\left(y\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{t^2 + x^2} f\left(y - x\right) \mathrm{d}x.$$

Question 18 *En utilisant l'expression de $Q^1_t\left(f\right)$ sous forme de série, montrer que*

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \int_0^{2\pi} \left(f\left(y\right) - Q^1_t\left(f\right)\left(y\right)\right) \mathrm{d}y = 0. \tag{10}$$

Question 19 *En utilisant l'expression intégrale de Q^1_t obtenue à la question* **17***, montrer que pour tout y réel,*

$$f\left(y\right) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} Q^1_t\left(f\right)\left(y\right). \tag{11}$$

5 Décroissance de l'énergie

Pour $f \in \mathscr{C}^0_\#$, on pose $Q^1_0\left(f\right) = f$ et

$$E\left(t\right) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left|Q^1_t\left(f\right)(x)\right|^2 \mathrm{d}x, \; t \geq 0. \tag{12}$$

Question 20 *Montrer que E est une fonction décroissante de t et déterminer sa limite en $t = +\infty$.*

Fin de l'épreuve