



L'objet de ce problème est l'étude de certaines fonctions définies sur des espaces de matrices.

Dans tout le problème, on fixe un entier $d \in \mathbb{N}^*$ et on note $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$) l'espace des matrices carrées à coefficients réels (respectivement complexes) de taille $d \times d$. Si i et j sont deux entiers entre 1 et d , on note $A_{i,j}$ le coefficient placé ligne i et colonne j dans la matrice A . On rappelle que $A^0 = I_d$. On note $\text{Tr}(A)$ la trace de la matrice A .

Les parties I, II et III sont indépendantes des parties IV et V.

I Une norme utile sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$

I.A – Montrer que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, l'application $f_P : A \mapsto P(A)$ est une fonction continue de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$.

I.B – Montrer que l'application $(A, B) \mapsto \text{Tr}({}^tA \times B)$ est un produit scalaire sur l'espace $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.

Dans toute la suite du problème, on note $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire.

I.C – Pour tous entiers i, j entre 1 et d et toute matrice $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, comparer $|A_{i,j}|$ et $\|A\|$.

I.D – Montrer que : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})^2, \|A \times B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

I.E – Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, comparer $\|A^n\|$ et $\|A\|^n$.

II Séries entières de matrices

Dans cette partie, on se donne une série entière à coefficients complexes $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence R strictement positif, éventuellement égal à $+\infty$.

II.A – Soit $\mathcal{B} = \{A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}), \|A\| < R\}$. Montrer que l'application $\varphi : A \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n A^n$ est définie et continue sur $\mathcal{B}$.

II.B – Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ une matrice non nulle telle que $\|A\| < R$.

II.B.1) Établir l'existence d'un entier $r \in \mathbb{N}^*$ tel que la famille $(A^k)_{0 \leq k \leq r-1}$ soit libre et la famille $(A^k)_{0 \leq k \leq r}$ soit liée.

II.B.2) Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer l'existence et l'unicité d'un r -uplet $(\lambda_{0,n}, \dots, \lambda_{r-1,n})$ dans $\mathbb{R}^r$ tel que

$$A^n = \sum_{k=0}^{r-1} \lambda_{k,n} A^k$$

II.B.3) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{r-1} |\lambda_{k,n}| \leq C \|A^n\|$$

II.B.4) En déduire que, pour tout entier k entre 0 et $(r-1)$, la série $\sum_{n \geq 0} a_n \lambda_{k,n}$ est absolument convergente dans $\mathbb{C}$.

II.B.5) Conclure qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\varphi(A) = P(A)$ et $\deg P < r$.

II.B.6) Déterminer ce polynôme P lorsque $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $a_n = \frac{1}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

II.C – Trouver une condition nécessaire et suffisante sur la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ pour qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}), \quad \varphi(A) = P(A)$$

III Deux applications

III.A – Première application : une formule de trigonométrie matricielle

III.A.1) Rappeler l'énoncé du théorème permettant de faire le produit de deux séries de nombres complexes. On admet dans la suite de la **partie III** que le résultat valable pour les séries de nombres complexes est encore valable pour des séries de matrices dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$.

III.A.2) Pour $(A, B) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})^2$ tel que A et B commutent, montrer que $\exp(iA)\exp(iB) = \exp(i(A+B))$.

III.A.3) Pour tout $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, on pose

$$\cos(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{A^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \sin(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{A^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Montrer

$$\forall A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}), \quad \cos(A)^2 + \sin(A)^2 = I_d$$

III.B – Seconde application : le théorème de Cayley-Hamilton

On fixe une matrice $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.

III.B.1) Pour R assez grand, montrer que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la matrice $(Re^{i\theta}I_d - A)$ est inversible dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, et que son inverse est la matrice

$$(Re^{i\theta})^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} (Re^{i\theta})^{-n} A^n$$

III.B.2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout R assez grand, la matrice

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (Re^{i\theta})^n (Re^{i\theta}I_d - A)^{-1} d\theta$$

vaut A^{n-1} .

III.B.3) On considère le polynôme caractéristique

$$\chi_A(X) = \det(A - X \cdot I_d) = \sum_{k=0}^d a_k X^k$$

Montrer que pour R assez grand :

$$\chi_A(A) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (Re^{i\theta}) \chi_A(Re^{i\theta}) (Re^{i\theta}I_d - A)^{-1} d\theta$$

III.B.4) En déduire que $\chi_A(A)$ est la matrice nulle.

On pourra faire intervenir des comatrices.

IV Étude d'une équation fonctionnelle

Soit $M \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ et $f :]-\infty, M[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\forall (x, y) \in \left] -\infty, \frac{M}{2} \right[, \quad 2f(x+y) = f(2x) + f(2y) \quad (\text{IV.1})$$

IV.A – Soit α un nombre strictement inférieur à $\frac{M}{2}$ et F la primitive de f s'annulant en α . Montrer que pour tous x et y dans $\left] -\infty, \frac{M}{2} \right[$, avec $y \neq \alpha$, on a :

$$f(2x) = 2 \frac{F(x+y) - F(x+\alpha) - \frac{1}{4}F(2y) + \frac{1}{4}F(2\alpha)}{y - \alpha}$$

IV.B – En déduire que la fonction f est de classe C^∞ sur $] -\infty, M[$.

IV.C – Montrer que $f'' = 0$, puis que l'ensemble des solutions continues de l'équation (IV.1) forme un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, dont on déterminera une base.

V Étude d'une autre fonction matricielle

Dans cette partie, on se donne une fonction $\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et on définit une fonction $f_\xi : \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}), \quad f_\xi(A) = \left(\xi(A_{i,j}) \right)_{1 \leq i,j \leq d}$$

On se propose de déterminer les fonctions continues $\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}), \quad A \text{ inversible} \Rightarrow f_\xi(A) \text{ inversible} \quad (\text{V.1})$$

V.A – Déterminer les fonctions continues ξ vérifiant la condition (V.1) lorsque $d = 1$.

On se place dorénavant dans le cas $d \geq 2$.

On se donne une fonction continue ξ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant (V.1).

V.B – Montrer

$$\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, \quad ad \neq bc \Rightarrow \xi(a)\xi(d) \neq \xi(b)\xi(c)$$

On pourra considérer la matrice
$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ c & d & 0 & \cdots & 0 \\ c & d & & & \\ \vdots & \vdots & & I_{d-2} & \\ c & d & & & \end{pmatrix}.$$

V.C – En déduire que la fonction ξ est injective, puis qu'elle est strictement monotone sur $\mathbb{R}$.

V.D – Montrer que la fonction ξ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$.

V.E – Le but de cette question est de montrer $\xi(0) = 0$.

V.E.1) Montrer que si $\xi(0) \neq 0$, alors il existe $\alpha > 0$ tel que $\xi(0)\xi(2) = \xi(1)\xi(\alpha)$.

V.E.2) Conclure.

V.F – Soit $\eta = \xi^{-1} : I \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction réciproque de la bijection $\xi : \mathbb{R} \rightarrow I$. Montrer que là où cela est défini

$$(\eta(xy))^2 = \eta(x^2)\eta(y^2)$$

V.G – On suppose dans cette question que la fonction η prend des valeurs strictement positives sur $I \cap]0, +\infty[$.

V.G.1) Montrer que la fonction $f = \ln \circ \eta \circ \exp$ vérifie l'équation (IV.1) sur un intervalle $] -\infty, M[$, avec M (éventuellement infini) à préciser en fonction de l'intervalle I .

V.G.2) En déduire que sur l'intervalle $I \cap]0, +\infty[$ la fonction η est de la forme

$$\eta : x \mapsto K_1 x^{\alpha_1}$$

avec deux constantes $K_1 > 0$ et $\alpha_1 > 0$.

V.G.3) Montrer que sur l'intervalle $I \cap]-\infty, 0[$ la fonction η est de la forme

$$\eta : x \mapsto K_2 (-x)^{\alpha_2}$$

avec deux constantes $K_2 < 0$ et $\alpha_2 > 0$.

V.G.4) Montrer que $I = \mathbb{R}$ puis que la fonction η est une fonction impaire.

V.H – En déduire dans le cas général que, si $\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue vérifiant la condition (V.1), alors elle est impaire et sa restriction à $\mathbb{R}_+^*$ est de la forme $x \mapsto Cx^\beta$, avec $C \neq 0$ et $\beta > 0$.

V.I – Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, calculer le déterminant de la matrice $A_\lambda \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ ne comportant que des 1 hors de la diagonale et que des λ sur la diagonale.

V.J – En déduire toutes les fonctions continues $\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant (V.1).

• • • FIN • • •
