

**CONCOURS COMMUNS  
POLYTECHNIQUES****EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PSI**

---

**MATHEMATIQUES 1****Durée : 4 heures**

---

*N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

---

**Les calculatrices sont autorisées****Notations, définitions et rappels**

Pour toute fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , on note :

$$L(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt$$

une expression intégrale de la longueur de la courbe représentative de  $f$ .

**Partie I****Quelques exemples de calculs de longueurs**

**I.1** Vérifier la formule donnant  $L(f)$  pour  $f$  définie sur  $[0, 1]$  par  $f(t) = t$ .

**I.2** Calculer  $L(f)$  pour  $f$  définie sur  $[0, 1]$  par  $f(t) = \operatorname{ch}(t)$ .

### I.3 Un exemple de calcul de longueur d'un arc de courbe

**I.3.1** Calculer  $L(f)$  pour  $f$  définie sur  $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$  par  $f(t) = \sqrt{1-t^2}$ .

**I.3.2** Retrouver le résultat de la question **I.3.1** sans calcul, par des considérations géométriques.

**I.4** Soit  $f$  définie sur  $[0, 1]$  par  $f(t) = t^2$ .

Calculer  $L(f)$ , en utilisant une intégration par parties ou en s'inspirant de la question **I.2**.

## Partie II

### Un calcul approché de longueur

L'objectif de cette partie est d'effectuer un calcul approché de la longueur d'un arc d'hyperbole.

On considère, pour ce faire, la fonction  $f$  définie sur  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$  par  $f(t) = \frac{1}{t}$ .

#### II.1 Expression intégrale de $L(f)$

**II.1.1** Donner une expression intégrale de  $L(f)$ .

**II.1.2** Montrer que  $L(f)$  est aussi la longueur de l'arc d'hyperbole correspondant à la restriction de  $f$  à l'intervalle  $[1, 2]$ .

#### II.2 Expression de $L(f)$ sous forme de série numérique

**II.2.1** Soit  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ . Rappeler le développement en série entière de la fonction  $u \mapsto (1+u)^\alpha$ , en précisant son domaine de validité.

**II.2.2** Montrer que, pour tout  $t \in ]0, 1[$ , on a :

$$\frac{\sqrt{1+t^4}}{t^2} = \frac{1}{t^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n)!}{(2n-1) 2^{2n} (n!)^2} t^{4n-2}.$$

**II.2.3** On note, pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $a_n = \frac{(2n)!}{(2n-1) 2^{2n} (n!)^2}$ . Montrer que la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante et donner un équivalent de  $a_n$  quand  $n$  tend vers l'infini.

**II.2.4** En déduire une expression de  $L(f)$  comme somme d'une série numérique (on vérifiera avec soin les hypothèses du théorème utilisé).

**II.2.5** Donner une valeur approchée de  $L(f)$  en utilisant les 5 premiers termes de la série obtenue à la question précédente et donner une majoration de l'erreur commise.

## Partie III

### Longueur du graphe des fonctions puissances

On s'intéresse ici, pour tout entier  $n \geq 1$ , aux fonctions puissances  $p_n$  définies sur  $[0, 1]$  par :

$$\forall t \in [0, 1], p_n(t) = t^n.$$

On désigne par  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \lambda_n = L(p_n) = \int_0^1 \sqrt{1 + n^2 t^{2n-2}} dt.$$

### III.1 Conjecture sur la limite éventuelle de $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

**III.1.1** Déterminer  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ .

**III.1.2** En traçant, sur un même graphe, les courbes représentatives de quelques fonctions  $p_n$  avec  $n$  de plus en plus grand, conjecturer la convergence de la suite  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  ainsi que la valeur de sa limite éventuelle.

### III.2 Convergence et limite de la suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

**III.2.1** Montrer que, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$\lambda_n - n \int_0^1 t^{n-1} dt = \mu_n$$

où :

$$\mu_n = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1 + n^2 t^{2n-2}} + n t^{n-1}}.$$

**III.2.2** Montrer que  $\lambda_n < 2$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**III.2.3** Déterminer la limite de la suite  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  (on citera avec précision le théorème utilisé).

**III.2.4** En déduire la convergence de la suite  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , ainsi que la valeur de sa limite.

**III.3** Plus généralement, montrer que si  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ , croissante et telle que  $f(0) = 0$  et  $f(1) = 1$ , on a alors  $L(f) < 2$ .

## Partie IV

### Un résultat inattendu

#### IV.1 Etude de l'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t} dt$

**IV.1.1** Montrer que l'intégrale généralisée  $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t} dt$  est convergente.

**IV.1.2** Montrer que, pour tout  $x \geq 1$ , on a :

$$\int_1^x \frac{\sin(t)}{t} dt = \cos(1) - \frac{\cos(x)}{x} - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2} dt.$$

En déduire que l'intégrale généralisée  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$  est convergente.

**IV.1.3** Montrer que l'intégrale généralisée  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t} dt$  est convergente.

**IV.1.4** Montrer que l'intégrale généralisée  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t} dt$  est divergente. En déduire la divergence de l'intégrale généralisée  $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t} dt$ .

**IV.2** On désigne par  $g$  la fonction définie sur  $]0, 1]$  par  $g(t) = \frac{1}{t} \sin\left(\frac{1}{t}\right)$  et par  $f$  la fonction définie sur le même intervalle par  $f(x) = \int_x^1 g(t) dt$ .

**IV.2.1** Montrer que la fonction  $f$  se prolonge par continuité en 0. On notera encore  $f$  ce prolongement.

**IV.2.2** Montrer que  $f$  est continue sur  $[0, 1]$  et indéfiniment dérivable sur  $]0, 1]$ .

**IV.2.3** Montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^1 |g(t)| dt = +\infty.$$

**IV.3** Pour tout réel  $x \in ]0, 1]$ , on désigne par  $\lambda(x)$  la longueur de la courbe représentative de la restriction de la fonction  $f$  au segment  $[x, 1]$ .

Donner une expression intégrale de  $\lambda(x)$ , pour tout  $x \in ]0, 1]$ , puis montrer que

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \lambda(x) = +\infty$ . Donner une interprétation de ce résultat.

## Partie V

### Continuité de la fonction longueur

On rappelle que l'application :

$$f \mapsto \|f\|_{\infty} = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$$

définit une norme sur l'espace  $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$  des fonctions continues de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ .

On note  $E_1 = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$  l'espace des fonctions continûment dérivables de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  et pour toute fonction  $f \in E_1$ , on note :

$$\|f\| = |f(0)| + \|f'\|_{\infty}.$$

#### V.1 Comparaison des normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_{\infty}$

**V.1.1** Montrer que l'application  $f \mapsto \|f\|$  définit une norme sur l'espace  $E_1$ .

**V.1.2** Montrer que :

$$\forall f \in E_1, \|f\|_{\infty} \leq \|f\|.$$

**V.1.3** Les normes  $\|\cdot\|$  et  $\|\cdot\|_{\infty}$  sont-elles équivalentes sur  $E_1$  ?

**V.2** On désigne par  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite de fonctions définie sur  $[0, 1]$  par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, 1], f_n(t) = \frac{\sin(n\pi t)}{\sqrt{n}}.$$

**V.2.1** Montrer que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge uniformément vers la fonction nulle sur  $[0, 1]$ .

**V.2.2** On désigne, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ , par  $I_n = L(f_n)$  la longueur de la courbe représentative de  $f_n$ . Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n \geq \sqrt{n} \frac{\pi}{2}.$$

**V.2.3** L'application  $L : f \mapsto L(f)$  est-elle continue sur  $(E_1, \|\cdot\|_{\infty})$  ?

**V.2.4** L'application  $L : f \mapsto L(f)$  est-elle continue sur  $(E_1, \|\cdot\|)$  ?

**Fin de l'énoncé**





