

**CONCOURS COMMUNS  
POLYTECHNIQUES****EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PC**

---

**MATHEMATIQUES 1****Durée : 4 heures**

---

*N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

---

**Les calculatrices sont interdites**

L'objectif du problème est de définir et d'étudier les notions de *polynôme, de matrice et de système différentiel stable*.

La partie I traite le cas particulier de la dimension 2 et aborde un contre-exemple en dimension 3. La partie II introduit les outils théoriques qui se spécialisent dans la partie III pour montrer en partie IV le critère de Routh-Hurwitz pour la stabilité des polynômes unitaires de degré 3. La partie V est une application de la partie IV à un système différentiel d'ordre 3 particulier.

La partie I est indépendante des quatre autres parties. Les parties II, III, IV et V sont, pour une grande part, indépendantes les unes des autres.

Le résultat principal de la partie II et celui de la partie IV sont résumés clairement en fin de partie.

**Il est demandé, lorsqu'un raisonnement utilise un résultat obtenu précédemment dans le problème, d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.**

## Notations et définitions

### Notations :

Soient  $n$  et  $p$  deux entiers naturels non nuls,  $\mathbb{K}$  l'ensemble  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

Notons  $\mathbb{K}[X]$  l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{K}$ ,

$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  l'espace vectoriel des matrices à  $n$  lignes et  $p$  colonnes à coefficients dans  $\mathbb{K}$ ,

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$ ,

$I_n$  la matrice identité d'ordre  $n$ .

Pour  $P \in \mathbb{K}[X]$ , on note  $Z_{\mathbb{K}}(P)$  l'ensemble des racines de  $P$  qui sont dans  $\mathbb{K}$ , c'est-à-dire l'ensemble des éléments  $\lambda \in \mathbb{K}$  qui sont tels que :  $P(\lambda) = 0$ .

On dit que  $P$  est unitaire si  $P$  est non nul et si son coefficient dominant est égal à 1.

Pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on note  $\text{Tr}(A)$  la trace de  $A$ ,  ${}^tA$  la matrice transposée de  $A$ ,  $\det(A)$  le déterminant de  $A$  et  $\chi_A$  le polynôme caractéristique de  $A$ , c'est-à-dire  $\chi_A \in \mathbb{K}[X]$  tel que :

$$\text{pour tout } \lambda \in \mathbb{K}, \chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n).$$

L'ensemble  $Z_{\mathbb{K}}(\chi_A)$  est noté  $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$  et l'ensemble des matrices  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telles que :

$${}^tMM = I_n \text{ est noté } \mathcal{O}_n(\mathbb{R}).$$

Pour  $x = (x_1, \dots, x_n)$  dans  $\mathbb{K}^n$ , on définit  $Ax$  comme étant l'élément  $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$  tel que :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , on note  $\Re(z)$  la partie réelle de  $z$ ,  $|z|$  le module de  $z$  et  $\bar{z}$  le complexe conjugué de  $z$ .

### Définitions :

Pour  $P \in \mathbb{K}[X]$ , on dit que  $P$  est stable si :

$$\text{pour tout } \lambda \in Z_{\mathbb{C}}(P), \Re(\lambda) < 0.$$

Pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on dit que  $A$  est stable si  $\chi_A$  est stable.

## Partie I : STABILITE DANS DES CAS PARTICULIERS

Soient  $a$  et  $b$  deux réels. On note  $P(X) = X^2 + aX + b$  et  $\Delta = a^2 - 4b$ .

On note  $z_1$  et  $z_2$  deux nombres complexes tels que :  $P(X) = (X - z_1)(X - z_2)$ .

Soit  $Q(X) = X^3 + X^2 + X + 1$  et  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

**I.1.** Montrer que  $a = -(z_1 + z_2)$  et  $b = z_1 z_2$ .

**I.2.** On suppose dans cette question que  $\Delta > 0$ .

**I.2.a.** Vérifier que si  $P$  est stable, alors  $a > 0$  et  $b > 0$ .

**I.2.b.** Montrer réciproquement que si  $a > 0$  et  $b > 0$ , alors  $P$  est stable.

**I.3.** On suppose dans cette question que  $\Delta = 0$ .

Montrer que  $P$  est stable si et seulement si  $a > 0$  et  $b > 0$ .

**I.4.** On suppose dans cette question que  $\Delta < 0$ .

**I.4.a.** Justifier que  $z_2 = \bar{z}_1$ .

**I.4.b.** Montrer que  $P$  est stable si et seulement si  $a > 0$  et  $b > 0$ .

**I.5.** On suppose dans cette question que  $n = 2$  et que  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

**I.5.a.** Exprimer  $\chi_A$  en fonction de  $\text{Tr}(A)$  et  $\det(A)$ .

**I.5.b.** Etablir que  $A$  est stable si et seulement si  $\text{Tr}(A) < 0$  et  $(-1)^n \det(A) > 0$ .

**I.6.** On suppose dans cette question que  $n = 3$ .

**I.6.a.** Trouver les racines complexes de  $Q$ .

**I.6.b.** Vérifier que  $\text{Tr}(B) < 0$  et que  $(-1)^n \det(B) > 0$ .

**I.6.c.** Montrer que ni  $Q$  ni  $B$  ne sont stables.

## Partie II : NORME SUBORDONNEE ET MESURE DE LOZINSKII

Soit  $n$  un entier naturel non nul. Dans toute cette partie, on note  $\|\cdot\|$  une certaine norme sur le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $\mathbb{K}^n$ . On définit l'ensemble :  $\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{K}^n \text{ tel que } \|x\| = 1\}$ .

Pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on définit :  $\|A\| = \sup_{x \in \mathcal{B}} (\|Ax\|)$  (l'existence de cette borne supérieure sera établie dans la question II.1.c.).

**On admet que** l'application  $A \mapsto \|A\|$  définit ainsi une norme  $\|\cdot\|$  sur l'espace vectoriel  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  qui s'appelle la norme subordonnée à  $\|\cdot\|$  : en effet, elle dépend du choix de la norme  $\|\cdot\|$ .

**II.1.**

**II.1.a.** Rappeler la définition d'une norme sur  $\mathbb{K}^n$ .

**II.1.b.** Vérifier que l'application  $x \mapsto \|Ax\|$  est continue sur  $\mathbb{K}^n$ .

**II.1.c.** Montrer l'existence de  $x_0 \in \mathcal{B}$  tel que :  $\forall x \in \mathcal{B}, \|Ax\| \leq \|Ax_0\|$ . Cela justifie donc la définition de  $\|A\| = \sup_{x \in \mathcal{B}} (\|Ax\|)$  et on a alors  $\|A\| = \|Ax_0\|$ .

**II.1.d.** Montrer que  $\|I_n\| = 1$ .

**II.1.e.** Etablir que pour tout  $x \in \mathbb{K}^n$  et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on a :  $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ .

**II.1.f.** Montrer que, pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on a :

$$\|A\| - \|B\| \leq \|A - B\| \quad \text{et} \quad \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

**II.2.** Montrer que, pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ , on a :  $\Re(\lambda) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \left( \frac{|1 + u\lambda| - 1}{u} \right)$ .

**II.3.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On se propose dans cette question de montrer l'existence du réel :

$$\mu(A) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \left( \frac{\|I_n + uA\| - 1}{u} \right).$$

Ce réel est appelé mesure de Lozinskiï de  $A$  (il dépend du choix de la norme initiale).

Pour  $u > 0$ , on note  $\mu(A, u) = \frac{\|I_n + uA\| - 1}{u}$ .

**II.3.a.** Montrer que pour tout  $u$  et  $v$  éléments de  $\mathbb{R}_+^*$  :

$$\mu(A, u) - \mu(A, v) = \|u^{-1}I_n + A\| - \|v^{-1}I_n + A\| - (u^{-1} - v^{-1}).$$

**II.3.b.** En déduire que si  $0 < u \leq v$ , alors :  $\mu(A, u) - \mu(A, v) \leq 0$ .

**II.3.c.** Vérifier que pour tout  $u > 0$ , on a :  $-\|A\| \leq \mu(A, u) \leq \|A\|$ .

**II.3.d.** En déduire l'existence du réel  $\mu(A) = \lim_{u \rightarrow 0^+} (\mu(A, u))$ .

**II.4.** On suppose dans cette question que  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Soit  $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ .

**II.4.a.** Montrer qu'il existe  $x \in \mathbb{C}^n$  tel que  $Ax = \lambda x$ ,  $\|x\| = 1$  et puis que, pour tout réel  $u$  strictement positif, on a :  $\|(I_n + uA)x\| = |1 + u\lambda|$ .

**II.4.b.** En déduire que :  $\Re(\lambda) \leq \mu(A)$ .

**II.4.c.** Donner une condition suffisante sur  $\mu(A)$  pour que  $A$  soit stable.

**Le résultat principal de cette partie II est que :**

$$\text{pour tout } \lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A), \Re(\lambda) \leq \mu(A)$$

où

$$\mu(A) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \left( \frac{\|I_n + uA\| - 1}{u} \right).$$

### Partie III : NORMES ET MESURES DE LOZINSKII ASSOCIEES

Dans cette partie, à tout élément  $x = (x_1, \dots, x_n)$  de  $\mathbb{C}^n$ , on associe la matrice-colonne  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ . De plus, si  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ , on note  $\overline{X} = \begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \vdots \\ \overline{x_n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  et  ${}^tX = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{C})$ .

On munit  $\mathbb{C}^n$  du produit scalaire canonique et de sa norme associée définis par les formules :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{C}^n, \quad \langle x, y \rangle = {}^t\overline{X}Y = \sum_{i=1}^n \overline{x_i}y_i \quad \text{et} \quad \|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}.$$

On remarque que ce produit scalaire et cette norme sur  $\mathbb{C}^n$  donnent par restriction le produit scalaire canonique et sa norme associée sur  $\mathbb{R}^n$  définis par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n, \quad \langle x, y \rangle = {}^tXY = \sum_{i=1}^n x_iy_i \quad \text{et} \quad \|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Pour  $A$  un élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on admet que les réels  $\|A\|$  et  $\mu(A)$  sont les mêmes selon que l'on considère  $A$  comme élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et que l'on munit  $\mathbb{R}^n$  de la norme  $\|\cdot\|_2$  ou que l'on considère  $A$  comme élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et que l'on munit  $\mathbb{C}^n$  de la norme  $\|\cdot\|_2$ . On note alors ces deux réels  $\|A\|_2$  et  $\mu_2(A)$ . On a ainsi :

$$\|A\|_2 = \sup_{x \in \mathcal{B}_2} (\|Ax\|_2) \quad \text{où} \quad \mathcal{B}_2 = \{x \in \mathbb{K}^n \text{ tel que } \|x\|_2 = 1\}$$

$$\text{et } \mu_2(A) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \left( \frac{\|I_n + uA\|_2 - 1}{u} \right)$$

Dans toute cette partie, on désigne par  $A$  un élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**III.1.** Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  et pour tout  $u > 0$  :

$$\|(I_n + uA)x\|_2^2 = {}^tXX + u {}^tX(tA + A)X + u^2 {}^tXtAAX.$$

**III.2.** Montrer qu'il existe  $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  et des réels  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  tels que  $\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_n$  et

$${}^tA + A = M \begin{pmatrix} \alpha_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \alpha_n \end{pmatrix} {}^tM.$$

**III.3.** On suppose dans toute cette question que  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $\|x\|_2 = 1$ . On pose  $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = {}^tMX$ .

**III.3.a.** Montrer que  $\sum_{i=1}^n y_i^2 = 1$ .

**III.3.b.** Vérifier que  $\|(I_n + uA)x\|_2^2 = 1 + u \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i^2 + u^2 {}^tXtAAX$ .

**III.3.c.** Montrer l'existence de deux réels  $\gamma$  et  $\delta$  tels que, pour tout  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  vérifiant  ${}^tXX = 1$ , on ait :  $\gamma \leq {}^tXtAAX \leq \delta$ .

**III.3.d.** Montrer que pour  $\gamma$  et  $\delta$  choisis comme en III.3.c, on a, pour tout  $u > 0$  :

$$\sqrt{1 + \alpha_1 u + \gamma u^2} \leq \|(I_n + uA)\|_2 \leq \sqrt{1 + \alpha_1 u + \delta u^2}.$$

**III.3.e.** En déduire que  $\mu_2(A) = \frac{\alpha_1}{2} = \max \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{R}} \left( \frac{{}^tA + A}{2} \right) \right\}$ .

**III.4.** Soit  $H$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  inversible. Pour  $x \in \mathbb{C}^n$ , on pose  $\|x\|_H = \|Hx\|_2$ .  
On admet que l'on définit ainsi des normes sur  $\mathbb{C}^n$  comme sur  $\mathbb{R}^n$  qui donnent sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une même norme subordonnée notée  $\|\cdot\|_H$  et une même mesure de Lozinskiï notée  $\mu_H$ .

**III.4.a.** Montrer que, pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $\|A\|_H = \|HAH^{-1}\|_2$ .

**III.4.b.** En déduire que, pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on a :  $\mu_H(A) = \mu_2(HAH^{-1})$ .

## Partie IV : UN CRITERE DE STABILITE EN DEGRE 3

Soient  $a, b$  et  $c$  trois réels.

On considère le polynôme réel  $P$  unitaire de degré 3 écrit sous la forme :

$$P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c.$$

On dit que  $P$  vérifie la propriété  $\mathcal{H}$  si :

$$a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0 \quad \text{et} \quad ab - c > 0.$$

Par le théorème de D'Alembert-Gauss, on note  $z_1, z_2$  et  $z_3$  trois nombres complexes tels que :

$$P(X) = (X - z_1)(X - z_2)(X - z_3).$$

**IV.1.** Montrer que :  $a = -(z_1 + z_2 + z_3)$ ,  $b = z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3$ ,  $c = -z_1z_2z_3$  et

$$ab - c = -z_1^2z_2 - z_1^2z_3 - z_2^2z_1 - z_2^2z_3 - z_3^2z_1 - z_3^2z_2 - 2z_1z_2z_3.$$

**IV.2.** Montrer que l'une des racines de  $P$  est un nombre réel.

On suppose dans toute la suite de cette partie que  $z_1$  est un réel qui sera noté  $\alpha_1$  et que  $z_2$  et  $z_3$  s'écrivent sous la forme  $z_2 = \alpha_2 + i\beta_2$  et  $z_3 = \alpha_3 + i\beta_3$  avec des réels  $\alpha_2, \alpha_3, \beta_2$  et  $\beta_3$ .

**IV.3.** On suppose dans cette question que  $\beta_2 = 0$ .

**IV.3.a.** Montrer que  $\beta_3 = 0$ .

**IV.3.b.** Montrer que si  $P$  est stable, alors  $P$  vérifie la propriété  $\mathcal{H}$ .

**IV.4.** On suppose dans cette question que  $\beta_2 \neq 0$ .

**IV.4.a.** Justifier que  $\alpha_3 = \alpha_2$  et que  $\beta_3 = -\beta_2$ .

**IV.4.b.** Vérifier que :  $a = -(\alpha_1 + 2\alpha_2)$ ,  $b = 2\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2 + \beta_2^2$ ,  $c = -\alpha_1(\alpha_2^2 + \beta_2^2)$  et

$$ab - c = -2\alpha_2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_2^2) - 4\alpha_1\alpha_2^2.$$

**IV.4.c.** Montrer que si  $P$  est stable, alors  $P$  vérifie la propriété  $\mathcal{H}$ .

**IV.5.** Montrer que si  $P$  vérifie la propriété  $\mathcal{H}$ , alors  $\Re(z_1), \Re(z_2)$  et  $\Re(z_3)$  sont non nuls.

**IV.6.** On suppose dans cette question que  $P$  vérifie la propriété  $\mathcal{H}$ .

On pose alors  $A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -c' & 0 & 1 \\ 0 & -b' & -a' \end{pmatrix}$  avec  $a' = a$ ,  $b' = \frac{ab-c}{a}$  et  $c' = \frac{c}{a}$  si bien que  $a', b'$  et  $c'$  sont trois réels strictement positifs.

On note  $H$  la matrice diagonale inversible suivante :  $H = \begin{pmatrix} \sqrt{a'b'c'} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{a'b'} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{a'} \end{pmatrix}$ .

On pose  $B' = HA'H^{-1}$ .

**IV.6.a.** Montrer que  $\chi_{A'}(X) = -P(X)$ .

**IV.6.b.** Calculer explicitement  $B'$  et vérifier que :  $\frac{B' + B}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix}$ .

**IV.6.c.** En déduire que  $\mu_H(A') = 0$ .

**IV.6.d.** En conclure que  $P$  est stable.

**Le résultat principal de cette partie IV est que :**

un polynôme à coefficients réels, unitaire de degré 3 est stable si et seulement si ce polynôme vérifie la propriété  $\mathcal{H}$ .

## Partie V : EXEMPLE DE SYSTEME DIFFERENTIEL STABLE

Soit  $C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ .

On considère le système différentiel (S) suivant, d'inconnue  $t \mapsto X(t)$ , une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad X'(t) = CX(t).$$

On dit que ce système différentiel (S) est stable si, quelle que soit la solution  $X$  de (S), on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (X(t)) = 0.$$

**V.1.** Vérifier que, pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $-\chi_C(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 4$ .

**V.2.** En déduire que  $C$  est stable.

**V.3.** Montrer l'existence d'une matrice  $U \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  inversible et de trois réels  $\alpha_1 < 0$ ,  $\alpha_2 < 0$

et  $\beta_2 \neq 0$ , tels que :  $C = UDU^{-1}$  avec  $D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 + i\beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 - i\beta_2 \end{pmatrix}$ .

**On ne cherchera pas à trouver explicitement  $U$  ni les réels  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  et  $\beta_2$ .**

**V.4.** On note, pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $Y(t) = U^{-1}X(t)$ .

**V.4.a.** Montrer que  $X$  est solution de (S) si et seulement si  $Y$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$  et pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , on a :  $Y'(t) = DY(t)$ .

**V.4.b.** En déduire l'expression de  $Y(t)$  en fonction de  $t \in \mathbb{R}_+$  dans ce cas.

**V.4.c.** Montrer qu'il existe  $X_1$ ,  $X_2$  et  $X_3$  dans  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  tels que, pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  :

$$X(t) = e^{\alpha_1 t} X_1 + e^{\alpha_2 t} \cos(\beta_2 t) X_2 + e^{\alpha_2 t} \sin(\beta_2 t) X_3.$$

**On ne cherchera pas à trouver explicitement les matrices  $X_1$ ,  $X_2$  et  $X_3$ .**

**V.4.d.** Vérifier que le système différentiel (S) est stable.

**Fin de l'énoncé**

