A 2013 MATH II PSI

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH.
SUPAERO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH
MINES DE SAINT ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (Filière PC).
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS 2013

SECONDE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière PSI

(Durée de l'épreuve : trois heures)
L'usage d'ordinateur ou de calculatrice est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
Cycle international, ENSTIM, TELECOM INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - PSI

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La formule du triple produit de Jacobi

On note $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbf{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls, $\mathbf{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs, $\mathbf{C}$ l'ensemble des nombres complexes et $\mathbf{C}^*$ l'ensemble des nombres complexes non nuls.

Si a_n, $n \geq 1$ est une suite numérique, on note $\prod_{n=1}^{+\infty} a_n$ la limite (si elle existe) de la suite $A_n = \prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n$.

L'expression : $i = 1, m$ signifie "pour tout i entier tel que $1 \leq i \leq m$."

Soit $\zeta \in \mathbf{C}$, on rappelle que si $\mathfrak{Re}\,\zeta > 0$, alors $\operatorname{Arg}\zeta = \operatorname{Arc\,tg}\left(\mathfrak{Im}\,\zeta / \mathfrak{Re}\,\zeta\right)$.

Dans tout ce problème z notera un nombre complexe non nul et x un nombre réel tel que $|x| < 1$.

1 Préambule

Question 1 *Soient $(\xi_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite dans $\mathbf{C}$ et $n \in \mathbf{N}$, démontrer par récurrence que*

$$\left|\prod_{k=1}^{n}(1+\xi_k) - 1\right| \leq \prod_{k=1}^{n}(1+|\xi_k|) - 1. \tag{1}$$

2 La formule de Jacobi

On pose

$$Q(x) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - x^{2k}\right) \quad \text{et} \quad H(x,z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 + z^2 x^{2k-1}\right). \tag{2}$$

Question 2 *Montrer que $Q(x)$ est bien défini, c'est-à-dire que la suite de terme général $\prod_{k=1}^{n}\left(1 - x^{2k}\right)$ converge.*

Question 3 *Soit $\rho_k = \left|1 + z^2 x^{2k-1}\right|$, montrer que le produit infini $\prod_{k=1}^{\infty}\rho_k$ converge. On pourra utilement penser à l'utilisation du Logarithme pour transformer le produit infini en série.*

Question 4 *Soit $\theta_k = \operatorname{Arg}\left(1 + z^2 x^{2k-1}\right)$, montrer que la série $\sum_{k=1}^{\infty}\theta_k$ converge.*

Question 5 *En déduire que H est bien défini.*

Question 6 *A l'aide de l'inégalité (1) démontrer que $Q(x) \to 1$ quand $x \to 0$.*

On pose

$$F(x,z) = H(x,z)\,H\left(x, z^{-1}\right). \tag{3}$$

Question 7 *Montrer que*

$$F\left(x,xz\right)=\left(1+z^{-2}x^{-1}\right)\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+z^{2}x^{2k+1}\right)\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+z^{-2}x^{2k-1}\right)$$

et en déduire que $xz^2F\left(x,xz\right)=F\left(x,z\right)$.

On admettra que $F\left(x,z\right)$ se décompose de façon unique sous la forme suivante :

$$F\left(x,z\right)=F_1\left(x,z\right)+F_2\left(x,z^{-1}\right),$$

où pour x fixé, $F_1\left(x,\xi\right)$ et $F_2\left(x,\xi\right)$ sont les sommes respectives de deux séries entières de rayon de convergence infini, soit

$$F_1\left(x,\xi\right)=\sum_{k=0}^{+\infty}a_k\left(x\right)\xi^k \text{ et } F_2\left(x,\xi\right)=\sum_{k=1}^{+\infty}a_{-k}\left(x\right)\xi^k\ ;$$

les fonctions $a_k, k=0,+\infty$ et $a_{-k}, k=1,+\infty$ de la variable réelle x étant à valeurs dans $\mathbf{C}$. On notera

$$F\left(x,z\right)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k\left(x\right)z^k,\ \ z\in\mathbf{C}^*. \tag{4}$$

Question 8 *On pose* $F_1^n\left(x,z\right)=\sum_{k=0}^{n}a_k\left(x\right)z^k$. *Démontrer que* $a_0\left(x\right)=F_1\left(x,0\right)$ *et que, pour* $n\geq 0$, $a_{n+1}\left(x\right)=\lim_{z\to 0}\left(F_1\left(x,z\right)-F_1^n\left(x,z\right)\right)/z^{n+1}$.

Question 9 *En déduire que si* $F\left(x,z\right)$ *vérifie à la fois* (4) *et* $F\left(x,z\right)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}d_k\left(x\right)z^k$, *alors* $\forall k\in\mathbf{Z}$ *les fonctions* a_k *et* d_k *sont égales, c'est-à-dire que les coefficients* $a_k\left(x\right)$ *dans l'expression* (4) *de* $F\left(x,z\right)$ *sont déterminés de façon unique.*

Question 10 *Montrer qu'il existe des fonctions* b_m, $m\in\mathbf{Z}$, *de la variable réelle* x, *à valeurs dans* $\mathbf{C}$, *telles que*

$$\forall z\in\mathbf{C}^*,\ \ F\left(x,z\right)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}b_m\left(x\right)z^{2m}.$$

Question 11 *A l'aide de la question* **7**, *montrer que* $\forall m\in\mathbf{Z}$, $b_m\left(x\right)=b_{m-1}\left(x\right)x^{2m-1}$.

Question 12 *Montrer que* $\forall m\in\mathbf{N}$, $b_m\left(x\right)=b_{-m}\left(x\right)$ *et donner l'expression de* $b_m\left(x\right)$ *en fonction de* $b_0\left(x\right)$ *et* x.

Question 13 *A l'aide de l'inégalité* (1) *démontrer que* $H\left(x,z\right)\to 1$ *quand* $x\to 0$.

Question 14 *En déduire que* $b_0\left(x\right)\to 1$ *quand* $x\to 0$.

On pose

$$P\left(x,z\right)=Q\left(x\right)F\left(x,z\right)\ \text{ et } \eta=e^{i\pi/4}. \tag{5}$$

Question 15 *Montrer que*

$$P\left(x,\eta\right)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-x^{4k}\right)\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-x^{4k-2}\right)\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+x^{4k-2}\right).$$

Question 16 *En déduire que* $P(x,\eta) = P(x^4, i)$.

On pose $c_m(x) = Q(x)\, b_m(x)$.

Question 17 *A l'aide de la question* **16** *et de l'expression de* $b_m(x)$ *de la question* **12**, *montrer que* $c_0(x^4) = c_0(x)$.

Question 18 *En utilisant une récurrence et à l'aide des questions* **14** *et* **6**, *en déduire que pour tout* $x \in]-1,1[$, $c_0(x) = 1$ *et la* formule du triple produit

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-x^{2k}\right)\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+z^2x^{2k-1}\right)\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+z^{-2}x^{2k-1}\right) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x^{m^2} z^{2m}. \tag{6}$$

3 Le nombre de partitions d'un entier

Question 19 *En posant* $x = t^{3/2}$ *et par un choix judicieux de* z^2, *déduire la* formule des nombres pentagonaux *d'Euler :*

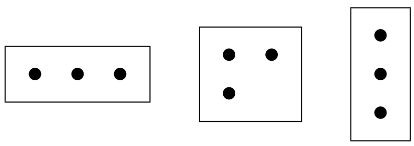
$$\prod_{m=1}^{\infty}(1-t^m) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty}(-1)^m\, t^{\left(3m^2+m\right)/2},\ t \in \mathbf{R},\ 0 \le t < 1, \tag{7}$$

de celle du triple produit (6).

Si n est un entier positif, on note $p(n)$ et on appelle nombre de partitions de n le nombre de façons de représenter n comme une somme d'entiers positifs sans prendre en considération l'ordre des termes ; c'est encore le nombre de solutions $(r_1, r_2, \ldots, r_n) \in (\mathbf{N}^*)^n$ de l'équation

$$\sum_{j=1}^{n} r_j = n,\ \text{telles que } r_1 \ge r_2 \ge \ldots \ge r_n \ge 1. \tag{8}$$

On aura par exemple $p(3) = 3$ car $3 = 3 = 2+1 = 1+1+1$, partitions que l'on représente sous la forme des trois diagrammes de Ferrer suivants :



On note S_1 l'ensemble des solutions de (8). On note également S_2 l'ensemble des solutions $(q_1, q_2, \ldots, q_n) \in (\mathbf{N}^*)^n$ de

$$\sum_{j=1}^{n} j q_j = n. \tag{9}$$

On note f l'application $(\mathbf{N}^*)^n \longrightarrow (\mathbf{N}^*)^n$ définie par $f(q_1, q_2, \ldots, q_n) = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ où $r_j = \sum_{i=j}^{n} q_i$.

Question 20 *En s'aidant de l'application f, démontrer que S_1 et S_2 comportent le même nombre d'éléments.*

Question 21 *Démontrer que pour $n > 0$, $p(n)$ est le coefficient de t^n dans le développement de $\prod_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=0}^{n} t^{ik}\right)$.*

Question 22 *A l'aide de la formule d'Euler (7), démontrer que*

$$\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} p(k)\, t^k\right) \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^m\, t^{\left(3m^2+m\right)/2}\right) = 1.$$

Question 23 *En déduire la valeur de $p(n)$, $n = 1, 7$.*

Fin de l'épreuve