# Mathématiques 2

**TSI** **2013**

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures — Calculatrices autorisées

**Notations**

Dans tout le problème, $n$ désigne un entier naturel $\geqslant 2$.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n$ à coefficients réels (respectivement complexes), $I_n$ la matrice unité et $\mathcal{O}_n$ la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (respectivement de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$).

Si $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$), on note $\operatorname{Det}(A)$ le déterminant de $A$ et $\operatorname{tr}(A)$ la trace de $A$, égale à la somme de ses éléments diagonaux : $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$), le polynôme caractéristique de $A$ est $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$.

## I Réduction des matrices réelles d'ordre 2

Soit $A$ une matrice carrée réelle de taille 2 : $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

### *I.A – Généralités*

**I.A.1)** Montrer que $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \operatorname{Det}(A)$.

**I.A.2)** Montrer que $A$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ si et seulement si

$$\operatorname{tr}(A)^2 - 4\operatorname{Det}(A) \neq 0 \qquad \text{ou} \qquad \exists\lambda_0 \in \mathbb{C} \text{ tel que } \mathbb{A} = {}_0\mathbb{I}_2$$

**I.A.3)** Montrer que $A$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si

$$\operatorname{tr}(A)^2 - 4\operatorname{Det}(A) > 0 \qquad \text{ou} \qquad \exists\lambda_0 \in \mathbb{R} \text{ tel que } \mathbb{A} = {}_0\mathbb{I}_2$$

### *I.B – Applications*

Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux suites à termes réels définies par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 2 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N},\ \begin{cases} u_{k+1} = 4u_k - 2v_k \\ v_{k+1} = u_k + v_k \end{cases}$$

On pose, pour $k \in \mathbb{N}$, $X_k = \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix}$.

**I.B.1)** Trouver une matrice $A$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que, pour tout entier naturel $k$ : $X_{k+1} = AX_k$.

**I.B.2)** Soit $k$ dans $\mathbb{N}$. Exprimer $X_k$ en fonction de $A$, $X_0$ et $k$.

**I.B.3)** Prouver que $A$ est diagonalisable puis déterminer une matrice $P$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, inversible telle que :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = D$$

**I.B.4)** Soit $k$ dans $\mathbb{N}$. Exprimer les coefficients de $A^k$ en fonction de $k$.

**I.B.5)** En déduire l'expression de $u_k$ et $v_k$ en fonction de $k$.

## II Réduction de matrices d'ordre 3 ou 4

### *II.A – Le cas* $\mathrm{n} = 3$

On définit la matrice $J$ par

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**II.A.1)** Calculer $J^2$ et $J^3$.

Soit $k$ dans $\mathbb{N}$. Préciser $J^k$ en fonction de $k$.

**II.A.2)** On note $j$ le nombre complexe égal à $e^{2i\pi/3}$.

Rappeler sans justification la valeur de $1+j+j^2$.

**II.A.3)** Déterminer le polynôme caractéristique de $J$ ainsi que ses valeurs propres.

**II.A.4)** Déterminer une matrice inversible $P$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que :

$$J = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & \bar{j} \end{pmatrix}P^{-1}$$

**II.A.5)** Soient trois nombres complexes $a$, $b$ et $c$. On pose

$$A(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

*a)* Exprimer $A(a,b,c)$ en fonction de $a,b,c$ et des matrices $I_3$, $J$ et $J^2$.

*b)* En déduire que $A(a,b,c)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ dans une base indépendante du choix des valeurs des complexes $a$, $b$ et $c$.

*c)* Préciser les valeurs propres de la matrice $A(a,b,c)$.

*d)* Exprimer le déterminant de $A(a,b,c)$ en fonction de $a,b,c$ et du nombre complexe $j$ sous la forme d'un produit.

**II.A.6)** On pose $E = \{A(a,b,c)\ ;(a,b,c)\in\mathbb{C}^3\}$.

*a)* Montrer que $E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

*b)* Donner la dimension de $E$ en justifiant avec soin.

### *II.B –* ***Le cas*** $\mathbf{n \geqslant 3}$ ***quelconque***

Dans cette question, $n$ désigne un entier supérieur ou égal à 3 : $n \geqslant 3$.

On note $e = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

On note $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ défini par : $u(e_2) = e_1, u(e_3) = e_2, \ldots, u(e_n) = e_{n-1}$ et $u(e_1) = e_n$, c'est-à-dire

$$\forall k \in \{2,\ldots,n\},\ \text{on a } u(e_k) = e_{k-1} \text{ tandis que } u(e_1) = e_n$$

**II.B.1)** On note $U$ la matrice de $u$ dans la base canonique $e$ de $\mathbb{C}^n$. Expliciter la matrice $U$.

**II.B.2)** On note $\omega$ une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité et $x_\omega$ le vecteur de $\mathbb{C}^n$ défini par :

$$x_\omega = \sum_{k=1}^{n} \omega^{k-1} e_k$$

Calculer $u(x_\omega)$ en fonction de $\omega$ et de $x_\omega$.

**II.B.3)** Montrer que $u$ est diagonalisable. On précisera une base de vecteurs propres pour $u$.

**II.B.4)** Que peut-on dire de $u^n$ ?

### *II.C –* ***Le cas*** $\mathbf{n = 4}$ ***quelconque***

Dans toute cette partie, on choisit $n = 4$.

**II.C.1)** Expliciter $U, U^2, U^3, U^4$ où $U$ est la matrice définie dans la question précédente.

**II.C.2)** On note $(a,b,c,d)$ une famille de 4 complexes et on pose :

$$V = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$$

Montrer que $V$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$.

Donner une base de vecteurs propres et préciser les valeurs propres de la matrice $V$ en fonction des nombres complexes $a,b,c,d$ et $i$.

 

# III Le théorème de Cayley-Hamilton

Soit $A$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On note : $\chi_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - a_{n-2}\lambda^{n-2} - \ldots - a_0)$ le polynôme caractéristique de $A$.
Le but de cette partie est de montrer que $A$ annule son polynôme caractéristique, c'est-à-dire que :

$$A^n - a_{n-1}A^{n-1} - a_{n-2}A^{n-2} - \ldots - a_0 I_n = \mathcal{O}_n$$

***III.A*** – Justifier l'existence d'une matrice $T$ triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et d'une matrice $P$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible telles que $A = PTP^{-1}$.

On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les éléments diagonaux de $T$.

On note $E_1, \ldots, E_n$ les matrices colonnes des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{C}^{\mathrm{n}}$.

Ainsi $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ et $E_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Le polynôme caractéristique de $T$ est : $\chi_T(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_n)$.

***III.B*** – Montrer que $T$ et $A$ ont le même polynôme caractéristique.

***III.C*** – Vérifier que, pour tout couple $(i, j)$ d'entiers compris entre 1 et $n$, on a :

$$(T - \lambda_i I_n)(T - \lambda_j I_n) = (T - \lambda_j I_n)(T - \lambda_i I_n)$$

***III.D*** – Montrer que, pour tout entier $k$ compris entre 1 et $n - 1$, on a :

$$(T - \lambda_{k+1} I_n)E_{k+1} \in Vect\{E_1, \ldots, E_k\}$$

***III.E*** – On pose, pour tout entier $k$ compris entre 1 et $n$ : $M_k = (T - \lambda_1 I_n)(T - \lambda_2 I_n)\ldots(T - \lambda_k I_n)$, que l'on peut noter $M_k = \prod_{j=1}^{k}(T - \lambda_j I_n)$ puisque les matrices du produit commutent deux à deux.

Montrer que, pour tout entier $k$ compris entre 1 et $n$, on a : $M_k E_k = 0$.

On pourra utiliser un raisonnement par récurrence sur $k$.

***III.F*** – En déduire que $\prod_{j=1}^{n}(T - \lambda_j I_n) = \mathcal{O}_n$ puis que $\prod_{j=1}^{n}(A - \lambda_j I_n) = \mathcal{O}_n$.

On observe que le résultat attendu en découle puisque $\chi_T = \chi_A$.

# IV Méthodes numériques de calcul du polynôme caractéristique et des valeurs propres d'une matrice réelle

Soit $A$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On note : $\chi_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - a_{n-2}\lambda^{n-2} - \ldots - a_0)$.

***IV.A – Le calcul du polynôme caractéristique***

Soit $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ une matrice colonne.

On pose $X = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$.

**IV.A.1)** Montrer que $A^n X_0 = a_{n-1}A^{n-1}X_0 + a_{n-2}A^{n-2}X_0 + \ldots + a_0 X_0$.

**IV.A.2)** En déduire que $X$ est solution d'un système linéaire de la forme : $\tilde{A}X = B$ où $\tilde{A}$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont on donnera les colonnes et $B$ est une matrice colonne que l'on précisera.

**IV.A.3)** Que peut-on dire de ce système linéaire si la famille $(A^{n-1}X_0, A^{n-2}X_0, \ldots, X_0)$ est libre ?

### *IV.B – Le calcul approché des valeurs propres*

Dans cette partie, on suppose que $A$ admet $n$ valeurs propres réelles distinctes telles que :

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots > |\lambda_n|$$

On considère l'ensemble $F$ des suites réelles $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} y_0, y_1, \ldots, y_{n-1} & \text{arbitraires} \\ y_{k+n} = a_{n-1}y_{k+n-1} + a_{n-2}y_{k+n-2} + \ldots + a_0 y_k & \text{pour tout entier } k \geqslant 0 \end{cases}$$

**IV.B.1)** Montrer que $F$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

**IV.B.2)** Montrer que, pour tout entier $j$ compris entre 1 et $n$, la suite $(\lambda_j^k)_{k\in\mathbb{N}}$ appartient à $F$.

Dans la suite, on admet que $F$ est de dimension finie avec $\dim F = n$.

On admet aussi que la famille $((\lambda_1^k)_{k\in\mathbb{N}}, \ldots, (\lambda_n^k)_{k\in\mathbb{N}})$ est une famille libre de l'espace vectoriel des suites de réels.

Soit une suite $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $F$.

**IV.B.3)** Justifier l'existence d'une famille de $n$ réels $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ telle que, pour tout entier $k$ :

$$y_k = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j^k$$

**IV.B.4)** On choisit $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ pour que $\alpha_1$ soit non nul.

*a)* Donner un équivalent simple de la suite $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ quand $k$ tend vers $+\infty$.

*b)* En déduire que $y_k$ est non nul à partir d'un certain rang.

*c)* Montrer que $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \frac{y_{k+1}}{y_k} = \lambda_1$.

**IV.B.5)** Une fois obtenue $\lambda_1$, comment peut-on construire une suite qui converge vers $\lambda_2$ ? On ne demande pas de justification.

### *IV.C – Illustration sur un exemple*

Dans cette partie, on choisit :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

**IV.C.1)** Calculer le polynôme caractéristique de $A$ et déterminer les deux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2$ avec $|\lambda_1| > |\lambda_2|$.

**IV.C.2)** Préciser la relation de récurrence vérifiée par les suites de l'espace $F$ associé à la matrice $A$.

**IV.C.3)** En prenant $y_0 = 0$, $y_1 = 1$, écrire des instructions en Maple ou Mathematica permettant de calculer les 10 premiers termes de la suite $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

**IV.C.4)** Calculer ces 10 premiers termes et déterminer le plus petit entier naturel $k$ tel que $\dfrac{y_{k+1}}{y_k}$ soit une valeur approchée de $\lambda_1$ à $10^{-1}$ près.

• • • FIN • • •