



On considère la famille de fonctions  $G_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  définies pour  $x \in \mathbb{R}$  par

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad G_x(t) = e^{ix \sin t}$$

Ces fonctions sont  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ ,  $2\pi$ -périodiques.

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on note  $(\varphi_n(x))_{n \in \mathbb{Z}}$  la famille des coefficients de Fourier exponentiels de la fonction  $G_x$ .

Pour tout réel  $x$  on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \varphi_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G_x(t) e^{-int} dt$$

Le but du problème est d'étudier quelques propriétés des fonctions  $\varphi_n$  ainsi définies.

## I Questions préliminaires

Soit  $x$  un réel fixé.

**I.A** –

**I.A.1)** Justifier l'égalité

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad G_x(t) = e^{ix \sin t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x) e^{int}$$

Que peut-on dire de la convergence de la série de Fourier de  $G_x$  ?

**I.A.2)** Montrer que pour tout  $k$  dans  $\mathbb{N}^*$ ,  $|\varphi_n(x)| = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

On utilisera des séries de Fourier des dérivées successives de  $G_x$ .

**I.B** – En exprimant  $G_x(-t)$  en fonction de  $G_x(t)$ , montrer que pour  $n$  dans  $\mathbb{Z}$ ,  $\varphi_n(x) \in \mathbb{R}$ .

**I.C** – Exprimer  $G_x(t + \pi)$  et en déduire les égalités suivantes pour  $n$  dans  $\mathbb{Z}$  :

$$\varphi_n(-x) = (-1)^n \varphi_n(x) = \varphi_{-n}(x)$$

Que peut-on dire de la parité de  $\varphi_n$  pour  $n \in \mathbb{Z}$  ?

**I.D** – Calculer  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\varphi_n(x)|^2$ .

L'étude préliminaire permet de restreindre l'étude des fonctions réelles  $\varphi_n$  à  $\mathbb{R}^+$  et de se limiter au cas où  $n \geq 0$ .

## II Forme intégrale et développement en série entière

Soit  $n$  un entier naturel.

**II.A** – Justifier que pour  $x$  réel,  $|\varphi_n(x)| \leq 1$ .

**II.B** – Montrer que pour  $x$  réel,

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} I_{n,k} \quad \text{avec} \quad I_{n,k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} i^k e^{-int} (\sin t)^k dt$$

## II.C –

**II.C.1)** À l'aide de la formule d'Euler, justifier que pour  $(n, k)$  dans  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ,

$$I_{n,k} = \sum_{m=0}^k \frac{A_{m,k}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{it(2m-k-n)} dt$$

avec  $A_{m,k}$  des constantes à préciser.

**II.C.2)** Vérifier que

$$\begin{cases} I_{n,k} = 0 & \text{si } n > k \text{ ou si } k - n \text{ est impair} \\ I_{n,k} = \frac{(-1)^p}{2^{n+2p}} \binom{n+2p}{n+p} & \text{si } k = n + 2p \text{ avec } p \geq 0 \end{cases}$$

**II.C.3)** En déduire le développement en série entière, pour  $n \geq 0$  et  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\varphi_n(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2p} \quad (\text{II.1})$$

Préciser le rayon de convergence.

**II.C.4)** Montrer que  $\varphi_n$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

## II.D – Relation de dérivation

Soit  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ , vérifier que pour  $x$  réel

$$\frac{d}{dx} (x^n \varphi_n(x)) = x^n \varphi_{n-1}(x)$$

## II.E – Calcul numérique de $\varphi_n(x)$ avec $x > 0$ fixé

On approche  $\varphi_n(x)$  à l'aide des sommes partielles

$$S_m = \sum_{p=0}^m (-1)^p a_p \quad \text{avec } m \in \mathbb{N} \text{ et } a_p = \frac{1}{p!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2p}$$

**II.E.1)** À partir de quelle valeur  $p_0$  de  $p$  la suite  $(a_p)_{p \in \mathbb{N}}$  est-elle décroissante ?

**II.E.2)** On suppose  $N > p_0$ . Majorer  $|R_N|$  en fonction de  $(N, n, x)$  avec

$$R_N = \sum_{p=N+1}^{+\infty} (-1)^p a_p$$

En déduire, pour  $\varepsilon > 0$  fixé, une condition suffisante sur  $N$  pour que  $|\varphi_n(x) - S_N| < \varepsilon$ .

La somme partielle  $S_N$  est dite alors *valeur approchée de  $\varphi_n(x)$  à  $\varepsilon$  près*.

**II.E.3)** Écrire une fonction Maple ou Mathematica, CalculPhi, d'arguments  $(n, x, \varepsilon)$  retournant une valeur approchée de  $\varphi_n(x)$  à  $\varepsilon$  près. Les coefficients  $a_p$  seront calculés par récurrence.

## III Équation différentielle et étude de $\varphi_n$ quand $x \rightarrow +\infty$

Soit  $n$  un entier naturel. On étudie l'équation différentielle d'inconnue  $y$

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \quad (\text{III.1})$$

On recherche des solutions dans l'ensemble  $E = \mathcal{C}^2([0, +\infty[)$ .

### III.A – Résolution et propriété des solutions

**III.A.1)** En utilisant le développement de  $\varphi_n$  en série entière (II.1), montrer que  $\varphi_n$  est solution sur  $[0, +\infty[$  de (III.1).

**III.A.2)** Soit  $y$  une solution dans  $E$  de (III.1). On pose  $z(x) = \sqrt{x}y(x)$  pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ .  
Montrer que  $z$  est solution dans  $E$  d'une équation différentielle du type

$$z'' + qz = 0 \quad (\text{III.2})$$

avec  $q \in E$ .

Préciser l'expression de la fonction  $q$  et vérifier que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} q(x) = 1$ .

**III.A.3)** Justifier que si  $z$  est une solution non nulle de (III.2), alors pour  $x > 0$ ,  $(z(x), z'(x)) \neq (0, 0)$ .

En déduire que si  $\alpha$  est un zéro de  $z$ , alors il existe un réel strictement positif  $\eta$  tel que  $\alpha$  soit le seul point d'annulation de  $z$  sur  $I = ]\alpha - \eta, \alpha + \eta[$ .

On dit dans ce cas que  $\alpha$  est un *zéro isolé* de  $z$ .

**III.A.4)** Vérifier que les zéros de  $\varphi_n$  sur  $]0, +\infty[$  sont isolés.

### III.B – Comportement asymptotique de $\varphi_n$ en $+\infty$

On étudie ici le comportement asymptotique au voisinage de  $+\infty$  d'une solution  $z \in E$  de l'équation différentielle définie sur  $]0, +\infty[$ , avec  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  :

$$z'' + \left(1 + \frac{\lambda}{x^2}\right)z = 0 \quad (\text{III.3})$$

Soit  $x_0$  dans  $]0, +\infty[$ .

**III.B.1)** En considérant l'équation différentielle (III.3) sous la forme  $z'' + z = g$  avec  $g(x) = \frac{-\lambda}{x^2}z(x)$ , la résoudre sur  $]0, +\infty[$  par la méthode de variation des constantes.

En déduire qu'il existe deux réels  $A$  et  $B$  tels que

$$\forall x \in ]0, +\infty[ \quad z(x) = A \cos(x) + B \sin(x) + \lambda \int_{x_0}^x z(u) \sin(u-x) \frac{du}{u^2}$$

**III.B.2)** On pose pour  $x > 0$

$$h(x) = \int_{x_0}^x |z(u)| \frac{du}{u^2}$$

a) Montrer qu'il existe des constantes réelles  $\mu$  et  $M$  telles que  $h$  vérifie l'inégalité différentielle pour  $x \geq x_0$

$$h'(x) - \frac{\mu}{x^2}h(x) \leq \frac{M}{x^2}$$

Préciser les constantes  $\mu$  et  $M$  en fonction de  $A$ ,  $B$  et  $\lambda$ .

b) En déduire que  $h$  est bornée sur  $[x_0, +\infty[$  puis que  $z$  est bornée sur ce même intervalle.

Multiplier par  $e^{\mu/x}$  et intégrer l'inégalité de la question précédente.

**III.B.3)** Justifier que

$$\int_x^{+\infty} z(u) \sin(u-x) \frac{du}{u^2} = O\left(\frac{1}{x}\right)$$

au voisinage de  $+\infty$ .

En déduire l'existence de constantes  $\alpha$  et  $\beta$  telles qu'au voisinage de  $+\infty$ ,

$$z(x) = \alpha \cos(x - \beta) + O\left(\frac{1}{x}\right)$$

**III.B.4)** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer qu'il existe un couple de réels  $(\alpha_n, \beta_n)$  tel que pour  $x \rightarrow +\infty$ ,

$$\varphi_n(x) = \frac{\alpha_n}{\sqrt{x}} \cos(x - \beta_n) + O\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)$$

## IV Étude des zéros de $\varphi_n$

On introduit l'équation différentielle

$$z_1''(x) + c^2 z_1(x) = 0 \quad \text{avec} \quad c > 0 \quad (\text{IV.1})$$

L'objectif de cette partie est de comparer les solutions des équations différentielles (III.2) et (IV.1) afin d'obtenir des informations sur les zéros des fonctions  $\varphi_n$ .

**IV.A** – En utilisant l'encadrement de la question II.E.2, montrer que  $\varphi_0(3) < 0$ . En déduire que  $\varphi_0$  possède un zéro  $\alpha_0 \in ]0, 3[$ .

On admettra que c'est le premier zéro de  $\varphi_0$ , c'est-à-dire que  $\varphi_0$  ne s'annule pas sur  $]0, \alpha_0[$ .

**IV.B** – En utilisant la question II.D, montrer par récurrence que pour tout entier  $n \geq 1$  la fonction  $\varphi_n$  est strictement positive sur  $]0, \alpha_0[$ .

**IV.C** – Dans cette question, on fixe  $n \in \mathbb{N}$  et  $c \in ]0, 1[$ . On pose  $z(x) = \sqrt{x} \varphi_n(x)$ , pour  $x > 0$ .

**IV.C.1** Justifier qu'il existe un réel  $A > 0$  tel que pour  $x > A$ ,  $q(x) > c^2$  ( $q$  définie en III.A.2).

**IV.C.2** Soit  $a > A$ . On pose pour  $x > 0$ ,  $z_1(x) = \sin(c(x - a))$ , solution de IV.1. On définit la fonction  $W = z z_1' - z_1 z'$ .

Vérifier que pour  $x > 0$ ,  $W'(x) = (q(x) - c^2)z(x)z_1(x)$ .

**IV.C.3** On note  $I_a = ]a, a + \pi/c[$  et on suppose que  $\varphi_n$  ne possède pas de zéros sur  $I_a$ .

Déterminer les signes de  $W(a)$ ,  $W(a + \pi/c)$  et de  $W'$  sur  $I_a$  et aboutir à une contradiction. En déduire que  $\varphi_n$  possède un zéro dans tout intervalle  $I_a$  avec  $a > A$ .

On pourra distinguer les cas suivant le signe de  $\varphi_n$  sur  $I_a$ .

**IV.D** – Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

**IV.D.1** Montrer qu'on peut ordonner les zéros de  $\varphi_n$ , c'est-à-dire qu'il existe une suite  $(\alpha_k^{(n)})_{k \in \mathbb{N}}$  strictement croissante de zéros de  $\varphi_n$  telle que  $\varphi_n$  ne s'annule pas sur  $]0, \alpha_0^{(n)}[$  et sur tout intervalle  $]\alpha_k^{(n)}, \alpha_{k+1}^{(n)}[$  avec  $k$  dans  $\mathbb{N}$  et que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k^{(n)} = +\infty$ .

Construire la suite  $(\alpha_k^{(n)})_{k \in \mathbb{N}}$  par récurrence sur  $k$  en montrant que l'ensemble  $\mathcal{Z}_k$  des zéros de  $\varphi_n$  dans l'intervalle  $]\alpha_k^{(n)}, +\infty[$  possède un plus petit élément.

**IV.D.2** En déduire que la suite  $(\alpha_k^{(n)})_{k \in \mathbb{N}}$  vérifie la propriété de répartition asymptotique :

$$\forall c \in ]0, 1[, \quad \exists j \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad 0 < \alpha_{j+k+1}^{(n)} - \alpha_{j+k}^{(n)} < \frac{\pi}{c}$$

---

• • • FIN • • •

---