



## *Matrices directement orthogonalement semblables et cercle propre*

Pour  $n$  entier supérieur ou égal à 2, on note  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel des matrices carrées à coefficients réels à  $n$  lignes, et  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices inversibles de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

On rappelle qu'une matrice  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est dite orthogonale si  ${}^tMM = I_n$  où  ${}^tM$  désigne la transposée de  $M$  et où  $I_n$  est la matrice identité. On note  $\text{O}(n)$  l'ensemble des matrices orthogonales de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , et  $\text{SO}(n)$  le sous-ensemble de  $\text{O}(n)$  constitué des matrices orthogonales de déterminant 1. On rappelle que  $(\text{O}(n), \times)$  est un sous-groupe de  $(\text{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$  et que  $(\text{SO}(n), \times)$  est un sous-groupe de  $(\text{O}(n), \times)$ . Le premier est appelé groupe orthogonal, le second groupe spécial orthogonal.

Pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on note  $f_A$  l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$ , c'est-à-dire l'unique endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  dont la matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  est  $A$ .

Si  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$ , on notera respectivement  $E_\lambda(A)$  et  $E_\lambda(f_A)$  les sous-espaces propres associés à  $\lambda$ , pour  $A$  et  $f_A$  respectivement.

On munit  $\mathbb{R}^2$  de sa structure euclidienne orientée canonique, de sorte que la base canonique est orthonormée directe. Le produit scalaire est noté  $(\cdot | \cdot)$  et la norme euclidienne associée est notée  $\| \cdot \|$ .

Pour tout couple  $(u, v)$  de vecteurs non nuls de  $\mathbb{R}^2$ , on dit que  $\theta$  est une mesure de l'angle orienté  $\widehat{(u, v)}$  lorsque  $\cos \theta = \frac{(u|v)}{\|u\|\|v\|}$  et  $\sin \theta = \frac{[u, v]}{\|u\|\|v\|}$ , où  $[\cdot, \cdot]$  désigne le produit mixte, c'est-à-dire le déterminant dans n'importe quelle base orthonormée directe.

On appelle similitude de rapport  $k$  tout endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^2$  pour lequel il existe un réel  $k > 0$  et une matrice  $M$  de  $\text{O}(2)$  tels que la matrice de  $f$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^2$  soit égale à  $kM$ .

## **I Le groupe orthogonal en dimension 2**

### **I.A – Les rotations planes**

**I.A.1)** Montrer que  $A \in \text{SO}(2)$  si et seulement si il existe un réel  $t$  tel que  $A = R_t$  avec  $R_t = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ .

**I.A.2)** Écrire une procédure ou une fonction dans le langage Maple ou Mathematica qui prend en entrée un quadruplet  $(a, b, c, d)$  de réels et qui renvoie, lorsque c'est possible, un réel  $t$  tel que  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = R_t$  et un message d'erreur dans le cas contraire.

**I.A.3)** Vérifier que l'application qui, à tout réel  $t$ , associe la matrice  $R_t$ , est un morphisme surjectif du groupe  $(\mathbb{R}, +)$  sur le groupe  $(\text{SO}(2), \times)$ .

Ce morphisme est-il bijectif ?

**I.A.4)** Montrer que, pour tout  $t$  de  $\mathbb{R}$  et tout  $u$  non nul de  $\mathbb{R}^2$ ,  $t$  est une mesure de l'angle orienté  $\widehat{(u, \rho_t(u))}$ , où  $\rho_t$  est l'endomorphisme (la rotation d'angle  $t$ )  $f_{R_t}$  canoniquement associé à  $R_t$ .

Pour tout  $k \in \mathbb{R}_+^*$  et tout  $t \in \mathbb{R}$ , l'endomorphisme  $k\rho_t$  est appelé similitude directe de rapport  $k$  et d'angle  $t$ .

### **I.B – Matrices semblables et sous-espaces propres**

Soit  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  telles que  $B = P^{-1}AP$ .

**I.B.1)** Montrer que  $f_A$  et  $f_B$  ont les mêmes valeurs propres.

**I.B.2)** Montrer que si  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$ , alors  $E_\lambda(f_A) = f_P(E_\lambda(f_B))$ .

### **I.C – Les réflexions planes**

**I.C.1)** On note  $K_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

Vérifier que l'endomorphisme  $\sigma_0 = f_{K_2}$  est une réflexion (symétrie orthogonale par rapport à une droite du plan) dont on précisera les éléments propres.

**I.C.2)** Pour tout réel  $t$ , préciser l'endomorphisme  $\sigma_t$  canoniquement associé à  $R_t^{-1} K_2 R_t$  et en particulier ses éléments propres.

**I.C.3)** Montrer, que pour toute matrice  $A$  de  $O(2)$  telle que  $\det(A) = -1$ , il existe un réel  $t$  tel que

$$A = \begin{pmatrix} \cos(2t) & \sin(2t) \\ \sin(2t) & -\cos(2t) \end{pmatrix}$$

## II Matrices directement orthogonalement semblables

Pour  $A, B$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on dit que  $A$  est orthogonalement semblable à  $B$  (ce que l'on pourra abréger en :  $A$  os  $B$ ) s'il existe une matrice  $P$  de  $O(n)$  telle que  $B = P^{-1}AP$  et on dit que  $A$  est directement orthogonalement semblable à  $B$  (en abrégé :  $A$  dos  $B$ ) s'il existe une matrice  $P$  de  $SO(n)$  telle que  $B = P^{-1}AP$ .

### II.A – Propriétés fondamentales de la similitude

**II.A.1)** Montrer que pour toute  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  on a  $A$  dos  $A$ , que pour tout  $(A, B)$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$  si  $A$  dos  $B$  alors  $B$  dos  $A$  et que pour tout  $(A, B, C)$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^3$  si  $A$  dos  $B$  et  $B$  dos  $C$  alors  $A$  dos  $C$ .

On dira donc indifféremment que  $A$  est directement orthogonalement semblable à  $B$  ou que  $A$  et  $B$  sont directement orthogonalement semblables.

On a les mêmes propriétés pour la relation de similitude orthogonale entre deux matrices carrées de même taille et on ne demande pas de refaire ici les vérifications.

**II.A.2)** Quelles sont les matrices directement orthogonalement semblables à  $\alpha I_n$  pour  $\alpha$  réel ?

**II.A.3)** Quelles sont les matrices directement orthogonalement semblables à  $A$  si  $A$  appartient à  $SO(2)$  ?

**II.A.4)** Quelles sont les matrices directement orthogonalement semblables à  $K_2$  ?

### II.B – Comparaison des relations de similitude.

Avec  $SO(n) \subset O(n) \subset GL_n(\mathbb{R})$ , si deux matrices sont directement orthogonalement semblables alors elles sont orthogonalement semblables et si deux matrices sont orthogonalement semblables alors elles sont semblables.

**II.B.1)** Montrer que  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  sont directement orthogonalement semblables.

**II.B.2)** Montrer que  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  sont semblables mais ne sont pas orthogonalement semblables.

**II.B.3)** Montrer que  $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  et sa transposée sont orthogonalement semblables mais ne sont pas directement orthogonalement semblables.

## III Cercle propre d'une matrice carrée réelle d'ordre 2

### III.A – Cercle propre

Pour  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  et  $(x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$ , on note  $\varphi_A(x, y)$  le déterminant de la matrice  $A(x, y) = \begin{pmatrix} a-x & b-y \\ c+y & d-x \end{pmatrix}$  et on considère  $\mathcal{CP}_A$  la courbe de  $\mathbb{R}^2$  définie par l'équation :  $\varphi_A(x, y) = 0$ .

**III.A.1)** Vérifier que  $\mathcal{CP}_A$  est un cercle (on convient qu'un cercle peut être réduit à un point) ; on appellera  $\mathcal{CP}_A$  cercle propre de  $A$ . Préciser son centre  $C_A$  et son rayon  $r_A$ .

**III.A.2)** Préciser, en fonction de  $A$ , le cardinal de l'intersection de  $\mathcal{CP}_A$  avec l'axe des abscisses  $\mathbb{R} \times \{0\}$ .

**III.A.3)** Que représentent les solutions de l'équation  $\varphi_A(x, 0) = 0$  pour  $A$  ?

Préciser le nombre de valeurs propres réelles de  $A$  selon la valeur de  $\Delta_A = (a-d)^2 + 4bc$ .

### III.B – Deux cas particuliers

Soit  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

**III.B.1)** Comparer le cercle propre de  $A$  et celui de sa transposée.

**III.B.2)** Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur  $\mathcal{CP}_A$  pour que  $A$  soit symétrique.

**III.B.3)**

a) Déterminer les matrices dont le cercle propre est de rayon nul et caractériser géométriquement leur endomorphisme canoniquement associé.

b) Lorsque le cercle propre est réduit à son centre, préciser l'endomorphisme canoniquement associé, d'une part quand ce centre appartient au cercle trigonométrique (de centre l'origine  $O = (0, 0)$  et de rayon 1) et d'autre part quand ce centre appartient à l'axe des abscisses.

c) Que peut-on dire de la matrice  $A$  et de  $f_A$  quand le cercle propre  $\mathcal{CP}_A$  est de rayon nul et de centre appartenant à l'axe des ordonnées  $\{0\} \times \mathbb{R}$  ?

### III.C – Cercle propre et matrices directement orthogonalement semblables

Montrer que deux matrices  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  sont directement orthogonalement semblables si et seulement si elles ont le même cercle propre.

### III.D – Rectangle propre

Pour  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  on considère les quatre points (éventuellement confondus)  $E = (d, -c)$ ,  $F = (a, b)$ ,  $G = (d, b)$  et  $H = (a, -c)$ .

**III.D.1)** Dans le cas où  $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ , représenter le cercle et le quadrilatère  $EHFG$ .

**III.D.2)** Lorsque les quatre points  $E$ ,  $F$ ,  $G$  et  $H$  sont distincts montrer qu'ils sont les sommets d'un rectangle, que l'on appellera rectangle propre de  $A$ .

**III.D.3)** Préciser les matrices pour lesquelles certains de ces points sont confondus, c'est-à-dire lorsque le rectangle est aplati.

### III.E – Décomposition orthogonale d'un endomorphisme

Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

**III.E.1)** Montrer qu'il existe un unique triplet  $(\alpha, \beta, \gamma)$  de  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$  que l'on précisera, tel que  $A$  soit directement orthogonalement semblable à  $\begin{pmatrix} \alpha + \gamma & -\beta \\ \beta & \alpha - \gamma \end{pmatrix}$ .

**III.E.2)** Suivant les valeurs de  $(\alpha, \beta, \gamma)$  préciser le nombre de valeurs propres réelles de  $A$ .

**III.E.3)** Montrer que pour tout endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^2$ , il existe des réels positifs ou nuls  $k$  et  $\ell$ , une rotation plane  $\rho_t$  et une réflexion  $\sigma_{t'}$  tels que  $f = k\rho_t + \ell\sigma_{t'}$ .

**III.E.4)** Écrire une procédure ou une fonction dans le langage Maple ou Mathematica qui prend en entrée un quadruplet  $(a, b, c, d)$  de réels et qui renvoie un quadruplet  $(k, \ell, t, t')$  tel que si  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  on ait  $f_A = k\rho_t + \ell\sigma_{t'}$ .

## IV Cercle propre et réduction

### IV.A – Cercle propre sécant avec l'axe des abscisses

Dans cette section on considère un cercle  $\mathcal{C}(\Omega, r)$  de centre  $\Omega$  et de rayon  $r$  non nul, sécant avec l'axe des abscisses.

On note  $L_1$  et  $L_2$ , de coordonnées respectives  $(\lambda_1, 0)$  et  $(\lambda_2, 0)$ , avec  $\lambda_1 < \lambda_2$ , les deux points d'intersection de  $\mathcal{C}(\Omega, r)$  avec l'axe des abscisses.

Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  une matrice de cercle propre égal à  $\mathcal{C}(\Omega, r)$ . On conserve les notations  $E$ ,  $F$ ,  $G$ ,  $H$  de **III.D**.

**IV.A.1)** Montrer que  $A$  est diagonalisable.

**IV.A.2)** Montrer que si  $c \neq 0$ , alors  $(\overrightarrow{L_1E}, \overrightarrow{L_2E})$  est une base de  $\mathbb{R}^2$  constituée de vecteurs propres pour  $f_A$ .

**IV.A.3)** Lorsque  $c = 0$ , peut-on donner une base de vecteurs propres pour  $f_A$  à l'aide du cercle propre et du rectangle propre ?

**IV.A.4)** Montrer que le carré du cosinus de l'angle de deux vecteurs propres de  $A$  associés à deux valeurs propres distinctes est déterminé par le cercle  $\mathcal{C}(\Omega, r)$ , et ne dépend pas du choix d'une matrice  $A$  de cercle propre égal  $\mathcal{C}(\Omega, r)$  (on pourra, si on le juge utile, introduire la projection orthogonale de  $\Omega$  sur l'axe des abscisses).

Qu'en est-il si  $A$  est symétrique ?

**IV.A.5)** Caractériser géométriquement  $f_A$  lorsque  $\Omega = O$ , avec  $O = (0, 0)$ , et  $r = 1$ .

**IV.A.6)** Caractériser géométriquement  $f_A$  lorsque  $\mathcal{CP}_A$  est le cercle de diamètre le segment  $[O, I]$  avec  $I = (1, 0)$ .

### IV.B – Cercle propre tangent à l'axe des abscisses

Dans cette section on considère un cercle  $\mathcal{C}(\Omega, r)$  de centre  $\Omega$  et de rayon  $r$  non nul, tangent à l'axe des abscisses.

On appelle  $L$ , de coordonnées  $(\lambda, 0)$ , le point de contact de  $\mathcal{C}(\Omega, r)$  avec l'axe des abscisses.

Soit  $A$  une matrice de cercle propre égal à  $\mathcal{C}(\Omega, r)$ .

**IV.B.1)** La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ? Est-elle trigonalisable ?

**IV.B.2)** Peut-on donner un vecteur propre à l'aide des points  $L, E, F, G$  et  $H$  ?

**IV.B.3)** Que peut-on dire des matrices dont le cercle propre est tangent à l'axe des abscisses et de centre situé sur l'axe des ordonnées ?

**IV.B.4)** Montrer qu'il existe un unique réel non nul  $\alpha$  tel que  $A$  soit directement orthogonalement semblable à la matrice  $T_{\lambda, \alpha} = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ .

Préciser  $\alpha$  à l'aide des éléments de la matrice  $A$ .

Où peut-on retrouver ce nombre sur le cercle propre ?

**IV.B.5)** Montrer qu'il existe une base orthonormée directe  $(e_1, e_2)$  du plan telle que l'on ait, pour tout  $u$  de  $\mathbb{R}^2$ ,  $f_A(u) = \lambda u + \alpha(e_2|u)e_1$ .

#### **IV.C – Cercle propre disjoint de l'axe des abscisses**

Dans cette section on considère un cercle  $\mathcal{C}(\Omega, r)$  de centre  $\Omega$  et de rayon  $r \geq 0$  disjoint de l'axe des abscisses.

On note  $K$  le projeté orthogonal de  $\Omega$  sur l'axe des abscisses.

Soit  $A$  une matrice de cercle propre égal à  $\mathcal{C}(\Omega, r)$ .

**IV.C.1)** Existe-t-il une matrice  $P$  de  $\text{GL}_2(\mathbb{R})$  telle que la matrice  $P^{-1}AP$  soit diagonale ?

Existe-t-il une matrice  $P$  de  $\text{GL}_2(\mathbb{R})$  telle que la matrice  $P^{-1}AP$  soit triangulaire supérieure ?

**IV.C.2)** Déterminer les points de  $\mathcal{C}(\Omega, r)$  en lesquels la tangente à  $\mathcal{C}(\Omega, r)$  contient  $K$ .

**IV.C.3)** Si  $U$  est l'un de ces points, exprimer les valeurs propres de  $A$ , considérée comme élément de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ , à l'aide de l'abscisse de  $K$  et de la distance  $KU$  de  $K$  à  $U$ .

#### **IV.D – Deux exemples**

Dans cette section, on considère dans  $\mathbb{R}^2$  un cercle  $\mathcal{C}(\Omega, r)$  de centre  $\Omega$  et de rayon  $r$  et  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  une matrice de cercle propre égal à  $\mathcal{C}(\Omega, r)$ .

**IV.D.1)** Dans cette question,  $\Omega = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ ,  $r = |\beta|$  et  $E = (\alpha + |\beta|, \beta)$ .

Préciser les valeurs propres de  $A$  et donner une matrice  $B$  dont les termes non diagonaux sont opposés et qui soit directement orthogonalement semblable à  $A$ , ainsi qu'une décomposition orthogonale de l'endomorphisme canoniquement associé à  $B$ .

**IV.D.2)** Dans cette question  $\Omega = (0, \alpha)$  avec  $\alpha > 0$  et  $r = \alpha/2$ .

Préciser les valeurs propres  $A$  et donner une matrice  $B$  dont les éléments non diagonaux sont opposés et qui soit directement orthogonalement semblable à  $A$ , ainsi qu'une décomposition orthogonale de l'endomorphisme canoniquement associé à  $B$ .

Faire un dessin dans le cas où  $\alpha = 6$  illustrant les questions **IV.C.2** et **IV.C.3**.

## **V Quadrique propre**

Pour  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  et  $(x, y, z)$  de  $\mathbb{R}^3$ , on note  $\psi_A(x, y, z)$  la partie réelle du déterminant de la matrice  $\begin{pmatrix} a - x - iz & b - y \\ c + y & d - x - iz \end{pmatrix}$ , où  $i$  est l'affixe complexe du point  $J = (0, 1)$ .

**V.A –**

**V.A.1)** Calculer  $\psi_A(x, y, z)$ .

**V.A.2)** Préciser la nature de la quadrique  $\mathcal{H}_A$  d'équation  $\psi_A(x, y, z) = 0$ .

**V.B –**

**V.B.1)** Préciser l'intersection de  $\mathcal{H}_A$  avec le plan d'équation  $z = 0$ .

**V.B.2)** Préciser l'intersection  $Z_A$  de  $\mathcal{H}_A$  avec le plan d'équation  $x = (a + d)/2$ .

**V.C –**

**V.C.1)** Si la matrice  $A$  a deux valeurs propres non réelles, comment voir les valeurs propres de  $A$  sur  $\mathcal{H}_A$  ? (On pourra s'intéresser à l'intersection de  $Z_A$  avec le plan d'équation  $y = 0$ .)

Peut-on voir une base de vecteurs propres à l'aide de  $\mathcal{H}_A$  ?

**V.C.2)** Dans le cas où  $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$  faire un dessin en perspective illustrant ce qui précède.

• • • FIN • • •