ÉCOLE DES PONTS PARISTECH.
SUPAERO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH
MINES DE SAINT ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (Filière PC).
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS 2012

SECONDE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière PSI

(Durée de l'épreuve : trois heures)
L'usage d'ordinateur ou de calculatrice est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
Cycle international, ENSTIM, TELECOM INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - PSI

L'énoncé de cette épreuve comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Fonctions d'endomorphismes

Dans ce texte on note $\mathbf{R}$ l'ensemble des nombres réels, $\mathbf{R}^+$ l'ensemble des réels positifs ou nul et $\mathbf{R}^{+*}$ l'ensemble des réels strictement positifs.

Pour tout entier n strictement positif on note $\mathcal{L}_n$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathbf{R}^n$; l'identité de $\mathcal{L}_n$ est notée I. Le produit scalaire Euclidien de $\mathbf{R}^n$ est noté (x, y) et la norme associée $\|x\| = (x,x)^{1/2}$. Si $\mathrm{S} \in \mathcal{L}_n$, l'ensemble des valeurs propres de S est noté $\sigma(\mathrm{S})$. On définit la fonction $\mathcal{Q}_{\mathrm{S}}$ sur $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ à valeurs dans $\mathbf{R}$ de la façon suivante :

$$\mathcal{Q}_{\mathrm{S}}(x) = \frac{(\mathrm{S}(x), x)}{\|x\|^2} \; ; \qquad (1)$$

c'est le quotient de Rayleigh de S.

On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de $\mathbf{R}^n$. Si $\mathrm{T} \in \mathcal{S}_n$, on note respectivement $m(\mathrm{T})$ et $M(\mathrm{T})$ le minimum et le maximum de $\sigma(\mathrm{T})$. On dit que $\mathrm{T} \in \mathcal{S}_n$ est un endomorphisme positif (resp. strictement positif) si $\forall x \neq 0,\ x \in \mathbf{R}^n$, on a $(\mathrm{T}(x), x) \geq 0$ (resp. $(\mathrm{T}(x), x) > 0$). L'ensemble des endomorphismes positifs (resp. strictement positifs) est noté $\mathcal{S}_n^+$ (resp. $\mathcal{S}_n^{+*}$).

1 Fonctions d'endomorphismes symétriques

Dans cette partie on considère $\mathrm{T} \in \mathcal{S}_n$.

Question 1 *Soient T_1 et T_2 appartenant à $\mathcal{S}_n$, démontrer que $\mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_2 \in \mathcal{S}_n$.*

Question 2 *Montrer que $\mathcal{Q}_{\mathrm{T}}(x)\ : \mathbf{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbf{R}$ atteint les valeurs $m(\mathrm{T})$ et $M(\mathrm{T})$.*

Question 3 *Démontrer que l'on a*

$$m(\mathrm{T}) = \min_{x \in \mathbf{R}^n, x \neq 0} \mathcal{Q}_{\mathrm{T}}(x) \ \text{ et } M(\mathrm{T}) = \max_{x \in \mathbf{R}^n, x \neq 0} \mathcal{Q}_{\mathrm{T}}(x). \tag{2}$$

On pourra faire appel à une base de vecteurs propres de T à cet effet.

Question 4 *Montrer que $\mathrm{T} \in \mathcal{S}_n^+$ (resp. $\mathrm{T} \in \mathcal{S}_n^{+*}$) si et seulement si $\sigma(\mathrm{T}) \subset \mathbf{R}^+$ (resp. $\sigma(\mathrm{T}) \subset \mathbf{R}^{+*}$).*

Soit J un intervalle contenant $\sigma(\mathrm{T})$ et f une fonction définie sur J, à valeurs dans $\mathbf{R}$.

Question 5 *Montrer qu'il existe une et une seule application linéaire U telle que*

$$\mathrm{U}(y) = f(\lambda)\, y,\ \forall \lambda \in \sigma(\mathrm{T}),\ \forall y \in \ker(\mathrm{T} - \lambda \mathrm{I}) \tag{3}$$

et que $\mathrm{U} \in \mathcal{S}_n$.

On notera $\mathrm{U} = f(\mathrm{T})$ l'endomorphisme symétrique ainsi défini, ce qui conduit à considérer f comme une application de $\mathcal{S}_n$ dans lui-même.

Question 6 *Soit p la restriction à J d'une fonction polynômiale à coefficients réels ; on note $p(t) = \sum_{j=0}^k \alpha_j t^j$, avec $\alpha_j \in \mathbf{R}$ pour tout j vérifiant $0 \leq j \leq k$. Démontrer que l'endomorphisme symétrique $p(\mathrm{T})$ est égal à $\alpha_0 \mathrm{I} + \sum_{j=1}^k \alpha_j \mathrm{T}^j$, où*

$$\mathrm{T}^j = \underbrace{\mathrm{T} \circ \mathrm{T} \circ \cdots \circ \mathrm{T}}_{j \text{ fois}}.$$

Question 7 *Y-a-t-il des fonctions $g : J \longrightarrow \mathbf{R}$ telles que $g(\mathrm{T})$ ne soit pas égal à un polynôme de T ?*

Question 8 *Déterminer les valeurs et les vecteurs propres de $f(\mathrm{T})$ en fonction de ceux de T.*

Question 9 *Pour des fonctions f et g définies sur l'intervalle J, démontrer que $(fg)(\mathrm{T}) = f(\mathrm{T}) \circ g(\mathrm{T})$.*

Question 10 *On considère $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n^{+*}$ et la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(t) = \frac{1}{t}$. Montrer que $f(\mathrm{S}) = \mathrm{S}^{-1}$, où S^{-1} note l'inverse de l'endomorphisme S.*

Question 11 *On considère* $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n^+$. *Lorsque* $f(t) = \sqrt{t}$ *on note* $\sqrt{\mathrm{S}}$ *l'endomorphisme* $f(\mathrm{S})$. *Montrer que l'endomorphisme* $\sqrt{\mathrm{S}}$ *est bien défini et que* $\left(\sqrt{\mathrm{S}}\right)^2 = \mathrm{S}$. *En admettant que toutes les valeurs propres de* S *sont simples, combien y-a-t-il de solutions* C *dans* $\mathcal{S}_n^+$, *puis dans* $\mathcal{S}_n$, *à l'équation* $\mathrm{C}^2 = \mathrm{S}$?

2 Relation d'ordre sur $\mathcal{S}_n$

Soient T_1 et T_2 deux éléments de $\mathcal{S}_n$. On note $\mathrm{T}_2 \geq \mathrm{T}_1$ si et seulement si $\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1 \in \mathcal{S}_n^+$.

Question 12 *Démontrer que la relation* $\geq$ *définit une relation d'ordre dans* $\mathcal{S}_n$, *est-elle totale ?*

Question 13 *Soit* $\mathrm{U} \in \mathcal{S}_n$, *démontrer que si* $\mathrm{T}_2 \geq \mathrm{T}_1$, *alors* $\mathrm{U} \circ \mathrm{T}_2 \circ \mathrm{U} \geq \mathrm{U} \circ \mathrm{T}_1 \circ \mathrm{U}$.

Soit J un intervalle de $\mathbf{R}$, on dit que la fonction $f\ : J \longrightarrow \mathbf{R}$ définit un opérateur croissant si pour tout T_1 et tout T_2, endomorphismes symétriques vérifiant $\sigma(\mathrm{T}_1) \subset J$, $\sigma(\mathrm{T}_2) \subset J$, alors

$$\mathrm{T}_2 \geq \mathrm{T}_1 \Longrightarrow f(\mathrm{T}_2) \geq f(\mathrm{T}_1). \tag{4}$$

Question 14 *Démontrer que l'application* $f\ : \mathbf{R}^+ \longrightarrow \mathbf{R}$ *donnée par* $f(t) = t^2$ *ne définit pas un opérateur croissant.*

On pourra considérer à cet effet les endomorphismes T_1 *et* T_2 *de matrices respectives*

$$\mathrm{M}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{M}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

dans la base canonique.

Question 15 *Soient* T_1 *et* $\mathrm{T}_2 \in \mathcal{S}_n^{+*}$ *tels que* $\mathrm{T}_2 \geq \mathrm{T}_1$; *en s'aidant de la question* **13** *avec* $\mathrm{U} = \mathrm{T}_2^{-1/2}$, *montrer que les valeurs propres de* $\mathrm{U} \circ \mathrm{T}_1 \circ \mathrm{U}$ *sont inférieures ou égales à* 1. *En déduire que* $\mathrm{U}^{-1} \circ \mathrm{T}_1^{-1} \circ \mathrm{U}^{-1} \geq \mathrm{I}$, *puis que l'application* $f\ : \mathbf{R}^{+*} \longrightarrow \mathbf{R}$ *donnée par* $f(t) = -1/t$ *définit un opérateur croissant.*

Question 16 *Soient* T_1 *et* $\mathrm{T}_2 \in \mathcal{S}_n^+$, *tels que* $\mathrm{T}_2 \geq \mathrm{T}_1$. *Démontrer que les valeurs propres de* $\mathrm{T}_2^{1/2} - \mathrm{T}_1^{1/2}$ *sont positives. En déduire que l'application* $f\ : \mathbf{R}^+ \longrightarrow \mathbf{R}$ *donnée par* $f(t) = \sqrt{t}$ *définit un opérateur croissant.*

3 Inégalité de Löwner-Heinz

On va montrer que pour tout $a \in]0,1[$, la fonction $\varphi_a\ : \mathbf{R}^+ \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par $\varphi_a(t) = t^a$ définit un opérateur croissant. Pour $u \in \mathbf{R}^+$, on note $f_u\ : \mathbf{R}^{+*} \longrightarrow \mathbf{R}$ la fonction donnée par

$$f_u(t) = \frac{t}{t+u}.$$

Question 17 *Démontrer que* f_u *définit un opérateur croissant. On pourra à cet effet s'aider de la question* **15**.

Soient φ une application $: \mathbf{R}^{+*} \longrightarrow \mathcal{L}_n$ et $\mathcal{B}$ une base de $\mathbf{R}^n$. On note $\Phi(s)$ la matrice de l'endomorphisme $\varphi(s)$ dans la base $\mathcal{B}$ et $\left(\Phi(s)_{ij}\right)_{1\leq i,j\leq n}$ les applications coordonnées de $\Phi(s)$. On dira que φ est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$ si les fonctions coordonnées $s \to \Phi(s)_{ij}$ le sont. Par définition on notera $\int_0^{+\infty} \varphi(s)\mathrm{d}s$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ a pour coefficients les $\int_0^{+\infty} \Phi(s)_{ij}\mathrm{d}s$. Cette matrice sera notée $\int_0^{+\infty} \Phi(s)\mathrm{d}s$.

Question 18 *Montrer que cette définition est indépendante du choix de la base $\mathcal{B}$.*

On considère $\mathrm{S} \in S_n^{+*}$ et $a \in]0,1[$.

Question 19 *Montrer que la fonction φ à valeurs dans $\mathcal{L}_n$ définie par $\varphi(u) = f_u(\mathrm{S})\, u^{a-1}$ est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$. On pourra trouver utile de faire appel à une base orthonormée adaptée à S.*

On admet que

$$t^a = \frac{\sin a\pi}{\pi} \int_0^{+\infty} f_u(t)\, u^{a-1}\mathrm{d}u. \tag{6}$$

Question 20 *Montrer que*

$$\mathrm{S}^a = \frac{\sin a\pi}{\pi} \int_0^{+\infty} f_u(\mathrm{S})\, u^{a-1}\mathrm{d}u. \tag{7}$$

Question 21 *En déduire que la fonction φ_a définit un opérateur croissant.*

Fin de l'épreuve