



Ce problème est basé sur une illusion d'optique.

On dit que deux courbes  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{R}$  de l'espace font illusion si les trois propriétés suivantes sont vérifiées quels que soient les points  $P$  et  $R$  de  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{R}$  :

- $P$  et  $R$  sont distincts ;
- si les deux vecteurs non nuls  $\vec{p}$  et  $\vec{r}$  dirigent respectivement la tangente à  $\mathcal{P}$  en  $P$  et la tangente à  $\mathcal{R}$  en  $R$ , le vecteur  $\overrightarrow{PR}$  n'est colinéaire ni à  $\vec{p}$  ni à  $\vec{r}$  ;
- le produit vectoriel  $\vec{p}_1 = \vec{p} \wedge \overrightarrow{PR}$  est orthogonal au produit vectoriel  $\vec{r}_1 = \vec{r} \wedge \overrightarrow{PR}$ .

Pour situer l'illusion d'optique, plaçons un observateur sur la droite  $(PR)$ , hors du segment  $[P, R]$  et regardant vers  $P$  et  $R$ . Son œil étant aligné avec  $P$  et  $R$ , ces points (distincts) lui semblent être confondus.

De plus, son œil est, a fortiori, dans le plan passant par  $P$  et dirigé par  $\vec{p}$  et  $\overrightarrow{PR}$  donc toute droite de ce plan lui semble être la tangente à  $\mathcal{P}$  ; l'illusion est analogue pour la tangente à  $\mathcal{R}$ . Comme  $\vec{p}_1$  et  $\vec{r}_1$  sont orthogonaux, ces deux tangentes lui semblent être orthogonales donc les deux courbes semblent se couper à angle droit.

Deux courbes faisant illusion étant données, on peut aussi chercher l'ensemble des points  $M$  de l'espace d'où l'observateur jouit de l'illusion d'optique.

Pour mener cette étude, l'espace est muni de sa structure euclidienne canonique et rapporté à un repère ortho-normé direct  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , noté également  $Oxyz$ . Le produit scalaire est noté  $\bullet$ , la norme euclidienne est notée  $\| \cdot \|$  et la distance euclidienne  $d$ .

## I Un premier exemple

**I.A** – Dans le plan  $Oxy$ , on considère la droite  $\Delta$  d'équation  $x = -3$ , les points  $F$  et  $S$  de coordonnées  $(1, 0)$  et  $(-1, 0)$  et le point variable  $P$  de coordonnées  $(x, y)$ .

**I.A.1)** Calculer les carrés des distances de  $P$  au point  $F$  et de  $P$  à la droite  $\Delta$ .

**I.A.2)** Former une équation cartésienne de la courbe  $\mathcal{P}$ , ensemble des points  $P$  du plan  $Oxy$  qui sont équidistants de  $F$  et de  $\Delta$ .

**I.A.3)** Quelle est la nature de  $\mathcal{P}$  et que représentent  $S$ ,  $F$  et  $\Delta$  pour  $\mathcal{P}$ ? Représenter  $\mathcal{P}$ .

**I.A.4)** Montrer que  $\mathcal{P}$  admet dans l'espace la représentation paramétrique

$$x = 2t^2 - 1; \quad y = 4t; \quad z = 0$$

**I.B** – On considère de même la courbe  $\mathcal{R}$  admettant la représentation paramétrique

$$x = 1 - 2u^2; \quad y = 0; \quad z = 4u$$

**I.B.1)** Montrer que  $\mathcal{R}$  est une parabole passant par  $F$  et la représenter dans le plan  $Oxz$ .

**I.B.2)** Montrer que  $\mathcal{R}$  se déduit de  $\mathcal{P}$  par une symétrie orthogonale par rapport à une droite à préciser.

**I.B.3)** Sur un même dessin, représenter le repère  $Oxyz$ , puis les tangentes en  $S$  à  $\mathcal{P}$  et en  $F$  à  $\mathcal{R}$ , et enfin  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{R}$  elles-mêmes.

**I.C** – Soit  $P$  le point de paramètre  $t$  sur  $\mathcal{P}$  et  $R$  le point de paramètre  $u$  sur  $\mathcal{R}$ .

**I.C.1)** Donner, par leurs composantes, un vecteur  $\vec{p}$  dirigeant la tangente en  $P$  à  $\mathcal{P}$  et un vecteur  $\vec{r}$  dirigeant la tangente en  $R$  à  $\mathcal{R}$ .

**I.C.2)** Calculer les composantes de  $\vec{p}_1 = \vec{p} \wedge \overrightarrow{PR}$  et de  $\vec{r}_1 = \vec{r} \wedge \overrightarrow{PR}$ .

**I.C.3)** L'un de ces deux produits vectoriels peut-il être nul ?

**I.D** – Montrer que les deux courbes  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{R}$  font illusion.

**I.E** – On reprend les notations du **I.C**. Soit  $\mu$  un réel et  $M$  le point de la droite  $(PR)$  défini par  $\overrightarrow{PM} = \mu \overrightarrow{PR}$ .

**I.E.1)** Comment faut-il choisir  $\mu$  pour que le point  $M$  ne soit pas sur le segment de droite  $[PR]$  (afin que du point  $M$  on puisse voir simultanément  $P$  et  $R$ ) ?

**I.E.2)** Exprimer les coordonnées  $(x, y, z)$  de  $M$  en fonction de  $t, u$  et  $\mu$ , puis  $t$  et  $u$  en fonction de  $y, z$  et  $\mu$ .

**I.E.3)** On fixe les coordonnées  $y$  et  $z$  du point  $M$ .

Montrer que le point  $M$  est un point depuis lequel on a l'illusion d'optique si et seulement si  $x$  est dans l'ensemble des valeurs prises par une certaine fonction de  $\mu$  que l'on précisera.

**I.E.4)** Quels sont les points de l'axe  $Ox$  depuis lesquels on a l'illusion d'optique ?

## II Coplanéarité et alignement

Soient, dans l'espace, quatre points  $M_1, M_2, M_3, M_4$  de coordonnées  $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x_4, y_4, z_4)$  et soient  $u, v, w, h$  quatre nombres réels.

On leur associe les matrices

$$L = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ h \end{bmatrix}$$

On considère  $V$  comme un vecteur de  $\mathbb{R}^4$  ; on note  $f$  l'application linéaire de  $\mathbb{R}^4$  dans lui-même ayant  $L$  pour matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^4$ .

On note  $V_1, V_2, V_3, V_4$  les vecteurs lignes de  $L$ .

### II.A –

**II.A.1)** En examinant le produit  $LV$ , montrer qu'il n'y a pas dans  $\text{Ker}(f)$  de vecteur non nul dont les trois premières composantes soient nulles.

**II.A.2)** Montrer que  $\text{Ker}(f)$  n'est pas réduit au vecteur nul si et seulement si le déterminant de  $L$  est nul.

**II.A.3)** Montrer que si  $V$  est non nul et appartient à  $\text{Ker}(f)$ , alors

$$ux + vy + wz + h = 0$$

est l'équation d'un plan contenant  $M_1, M_2, M_3$  et  $M_4$ .

**II.A.4)** Montrer que  $M_1, M_2, M_3$  et  $M_4$  sont coplanaires si et seulement si le déterminant de  $L$  est nul.

### II.B –

**II.B.1)** On suppose que le rang de  $S$  est inférieur ou égal à 2.

Montrer que, quel que soit  $M_4$ , le déterminant de  $L$  est nul. En déduire que  $M_1, M_2, M_3$  sont alignés.

**II.B.2)** Montrer que le rang de  $S$  est inférieur ou égal à 2 si et seulement si  $M_1, M_2, M_3$  sont alignés.

**II.C –** On suppose que  $M_1 \neq M_2$ .

**II.C.1)** Montrer que la famille des deux vecteurs lignes  $(V_1, V_2)$  est libre.

**II.C.2)** Montrer que  $M_1, M_2, M_3$  sont alignés si et seulement si il existe  $\mu \in \mathbb{R}$  tel que  $V_3 = \mu V_1 + (1 - \mu)V_2$ .

**II.D –** On suppose ici que les points  $M_1, M_2, M_3, M_4$  sont alignés et tous distincts.

**II.D.1)** Montrer que les deux dernières lignes de la matrice  $L$  sont combinaisons linéaires des deux premières.

**II.D.2)** Qu'en résulte-t-il pour le rang de  $L$  et la dimension de  $\text{Ker}(f)$  ?

**II.D.3)** Montrer que  $L$  admet, dans le cas où on s'est placé, 0 comme valeur propre, avec un ordre de multiplicité supérieur ou égal à 2.

### II.E – Application

On suppose  $M_1, M_2, M_3, M_4$  non coplanaires. Une droite  $\Delta$  rencontre en quatre points  $M'_4, M'_3, M'_2, M'_1$ , tous distincts, les quatre plans contenant respectivement les points  $(M_1, M_2, M_3), (M_1, M_2, M_4), (M_1, M_3, M_4)$  et  $(M_2, M_3, M_4)$ .

On note  $M''_1, M''_2, M''_3, M''_4$  les milieux des segments  $[M_1 M'_1], [M_2 M'_2], [M_3 M'_3], [M_4 M'_4]$ . On se propose de démontrer que  $M''_1, M''_2, M''_3$  et  $M''_4$  sont coplanaires.

Pour cela, on utilise encore la matrice  $L$  construite à l'aide des coordonnées de  $(M_1, M_2, M_3, M_4)$  et aussi les matrices  $L'$  et  $L''$  construites de la même façon à l'aide des coordonnées de  $(M'_1, M'_2, M'_3, M'_4)$  et de  $(M''_1, M''_2, M''_3, M''_4)$ .

**II.E.1)** On note  $V'_1, V'_2, V'_3, V'_4$  les vecteurs lignes de  $L'$ . En considérant les points  $M'_1, M_2, M_3, M_4$ , montrer qu'il existe des réels  $\beta_1, \gamma_1, \delta_1$  tels que

$$V'_1 = \beta_1 V_2 + \gamma_1 V_3 + \delta_1 V_4 \quad \text{avec} \quad \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 = 1$$

**II.E.2)** Montrer qu'il existe une matrice carrée  $T$  de taille 4 vérifiant :

$$\begin{cases} \text{les termes diagonaux sont nuls} \\ \text{sur chaque ligne, la somme des termes vaut 1} \\ L' = T.L \end{cases}$$

**II.E.3)** Montrer que le vecteur-colonne de composantes  $(1, 1, 1, 1)$  est vecteur propre de  $T$  et donner la valeur propre associée.

- II.E.4)** Montrer que  $L$  est inversible et que  $L'$  et  $T$  sont de rang 2.
- II.E.5)** En utilisant la trace de  $T$ , donner la liste des valeurs propres de  $T$ .
- II.E.6)** Montrer que  $L'' = (L + L')/2$  et justifier que  $L''$  n'est pas inversible.
- II.E.7)** Conclure.

### III Un deuxième exemple

**III.A** – On considère la courbe  $\mathcal{P}$  du plan  $z = 0$  admettant dans  $Oxyz$  la représentation paramétrique

$$x = 5 \cos(t); \quad y = 3 \sin(t); \quad z = 0$$

**III.A.1)** Montrer qu'il s'agit d'une ellipse dont on précisera les foyers  $F$  et  $F'$ .

**III.A.2)** Représenter  $\mathcal{P}$  dans le plan  $Oxy$ .

**III.B** – On considère de même la courbe  $\mathcal{R}$  du plan  $y = 0$  admettant dans  $Oxyz$  la représentation paramétrique

$$x = 4 \operatorname{ch}(u); \quad y = 0; \quad z = 3 \operatorname{sh}(u)$$

(ch et sh désignent le cosinus hyperbolique et le sinus hyperbolique.)

**III.B.1)** Montrer que  $\mathcal{R}$  est une partie d'une hyperbole  $\mathcal{H}$  dont on donnera une équation cartésienne.

**III.B.2)** Préciser, sans justification, les asymptotes de  $\mathcal{H}$ .

**III.B.3)** Représenter  $\mathcal{R}$  dans le plan  $Oxz$ .

**III.C** – Sur un même dessin, représenter le repère  $Oxyz$ , les points  $F$  et  $F'$  puis les tangentes remarquables à  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{R}$ , et enfin  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{R}$  elles-mêmes.

**III.D** – Soient  $P$  le point de paramètre  $t$  sur  $\mathcal{P}$  et  $R$  le point de paramètre  $u$  sur  $\mathcal{R}$ .

Donner, par leurs composantes, un vecteur  $\vec{p}$  dirigeant la tangente en  $P$  à  $\mathcal{P}$  et un vecteur  $\vec{r}$  dirigeant la tangente en  $R$  à  $\mathcal{R}$ .

On ne terminera pas la démonstration du fait que  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{R}$  font illusion.

**III.E** – Les réels  $x, y, z, t$  et  $u$  étant donnés, soient  $M$  le point de coordonnées  $x, y, z$ ,  $P$  le point de paramètre  $t$  sur  $\mathcal{P}$  et  $R$  le point de paramètre  $u$  sur  $\mathcal{R}$ . On leur associe la matrice

$$S = \begin{bmatrix} 5 \cos(t) & 3 \sin(t) & 0 & 1 \\ 4 \operatorname{ch}(u) & 0 & 3 \operatorname{sh}(u) & 1 \\ x & y & z & 1 \end{bmatrix}$$

On note  $V_1, V_2$  et  $V_3$  ses vecteurs lignes.

**III.E.1)** En utilisant l'un des résultats de la **partie II**, montrer que  $M, P$  et  $R$  sont alignés si et seulement si il existe un réel  $\mu$  tel que  $V_3 = \mu V_1 + (1 - \mu)V_2$ .

**III.E.2)** En déduire une représentation paramétrique de l'ensemble des points  $M$  ainsi obtenus, de la forme

$$x = x(t, u, \mu); \quad y = y(t, u, \mu); \quad z = z(t, u, \mu)$$

**III.E.3)** Comment faut-il choisir  $\mu$  pour que l'observateur placé en  $M$  ait l'illusion d'optique ?

### IV Recherche de l'ensemble des solutions

On voudrait maintenant trouver tous les couples de courbes qui font illusion. On va se limiter à chercher  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{R}$  faisant illusion et vérifiant **en plus** :

- $\mathcal{P}$  admet une représentation paramétrique de la forme  $\overrightarrow{OP} = \vec{F}(t)$  où la fonction vectorielle  $\vec{F}$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et sa dérivée vérifie  $\forall t \in \mathbb{R}, \vec{F}'(t) \neq \vec{0}$  ;
- $\mathcal{R}$  admet une représentation paramétrique de la forme  $\overrightarrow{OR} = \vec{G}(u)$  où la fonction vectorielle  $\vec{G}$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et sa dérivée vérifie  $\forall u \in \mathbb{R}, \vec{G}'(u) \neq \vec{0}$  ;
- il existe deux réels  $t_0$  et  $u_0$  rendant minimale la distance  $PR$  ;
- $\mathcal{P}$  n'est pas contenue dans une droite et  $\mathcal{R}$  non plus.

On note  $P_0$  (et  $R_0$ ) les points de paramètres  $t_0$  (et  $u_0$ ) sur  $\mathcal{P}$  (et  $\mathcal{R}$ ).

Soient donc  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{R}$  deux courbes ayant **toutes** ces propriétés.

On rappelle que l'intersection d'un cône de révolution avec un plan ne passant pas par le sommet du cône est une ellipse, une hyperbole ou une parabole.

**IV.A** – On note  $P$  et  $R$  les points  $P(t)$  et  $R(u)$ ,  $\vec{V}$  le produit vectoriel  $\overrightarrow{PR} \wedge \vec{F}'(t)$ ,  $\vec{W}$  le produit vectoriel  $\overrightarrow{PR} \wedge \vec{G}'(u)$  et  $\varphi(t, u)$  le produit scalaire de  $\vec{V}$  et  $\vec{W}$ .

Montrer que  $\varphi(t, u)$  est nul pour tout couple  $(t, u)$  de réels.

#### IV.B –

**IV.B.1)** En utilisant  $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP}$ , exprimer la dérivée partielle de  $\|\overrightarrow{PR}\|^2$  par rapport à  $u$  en fonction du produit scalaire  $\overrightarrow{PR} \bullet \vec{G}'(u)$ .

**IV.B.2)** Montrer que  $\overrightarrow{P_0R_0}$  est orthogonal à  $\vec{G}'(u_0)$  et à  $\vec{F}'(t_0)$ .

**IV.C –** Dans cette question, on fixe la valeur de  $t$  et on choisit un repère orthonormé  $PXYZ$  d'origine  $P$  avec l'axe  $\overrightarrow{PZ}$  dans la direction de  $\vec{F}'(t)$ .

On note  $v$  la troisième composante de  $\vec{F}'(t)$ .

On abrègera en  $X, Y, Z, X', Y'$  et  $Z'$  les composantes de  $\overrightarrow{PR}(u)$  et de  $\vec{G}'(u)$ .

**IV.C.1)** Traduire par une relation entre ces divers nombres la nullité de  $\varphi(t, u)$ .

**IV.C.2)** Montrer que la fonction  $h$  telle que  $h(u) = \frac{Z^2}{X^2 + Y^2 + Z^2}$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et calculer sa dérivée.

**IV.C.3)** En utilisant **IV.C.1**, montrer que  $h$  est constante sur  $\mathbb{R}$ .

**IV.C.4)** En déduire que  $\mathcal{R}$  est contenue dans une surface, qu'on notera  $\mathcal{S}(t)$  et qui est, suivant la valeur de la constante précédente, soit le plan passant par  $P$  et orthogonal à  $\vec{F}'(t)$ , soit un cône de révolution de sommet  $P$  et dont l'axe est dirigé par  $\vec{F}'(t)$ .

**IV.D –** Dans cette question, on fixe la valeur de  $t$  à  $t = t_0$ , donc  $P = P_0$ .

**IV.D.1)** Montrer que le point  $R_0$  appartient à  $\mathcal{S}(t_0)$ .

**IV.D.2)** Montrer que  $\mathcal{R}$  est contenue dans le plan  $\Gamma$  passant par  $P_0$  et orthogonal à  $\vec{F}'(t_0)$ .

#### IV.E –

**IV.E.1)** Montrer que  $\mathcal{P}$  n'est pas incluse dans le plan  $\Gamma$ .

**IV.E.2)** On fixe  $t$  à une valeur  $t_1$  telle que le point  $P_1 = P(t_1)$  de  $\mathcal{P}$  ne soit pas dans le plan  $\Gamma$ .

Montrer que  $\mathcal{S}(t_1)$  est un cône de révolution de sommet  $P_1$ .

#### IV.F –

**IV.F.1)** Montrer que  $\mathcal{R}$  est contenue dans une ellipse, une hyperbole ou une parabole, elle-même contenue dans le plan  $\Gamma$ .

**IV.F.2)** Montrer de même que  $\mathcal{P}$  est contenue dans une ellipse, une hyperbole ou une parabole, elle-même contenue dans un plan  $\Pi$  perpendiculaire à  $\Gamma$  et que l'on précisera.

---

• • • FIN • • •

---