

# Mathématiques 2

MP

2012

# CONCOURS CENTRALE SUPÉLEC

4 heures

Calculatrices autorisées

Ce sujet est divisé en trois parties. La partie III est indépendante des deux premières (même si les parties II et III ont en commun de s'intéresser à des matrices dites de Hankel).

Il est attendu des candidat(e)s qu'ils fassent preuve de qualités de rédaction, de clarté et de présentation.

#### Notations

Dans tout le problème,  $\mathbb K$  désigne indifféremment  $\mathbb R$  ou  $\mathbb C.$ 

On note  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  l'espace vectoriel des suites à valeurs dans  $\mathbb{K}$ .

Pour tout espace vectoriel E sur  $\mathbb{K}$ , on note  $\mathcal{L}(E)$  l'algèbre des endomorphismes de E.

On note  $\sigma$  l'élément de  $\mathcal{L}(\mathbb{K}^{\mathbb{N}})$  qui à tout  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  associe  $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  de terme général  $y_n = x_{n+1}$ .

On note  $\mathbb{K}[X]$  l'algèbre des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{K}$ , et  $\mathbb{K}_m[X]$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}[X]$  formé des polynômes de degré inférieur ou égal à m.

On rappelle qu'un polynôme non nul est dit unitaire si le coefficient de son monôme de plus haut degré vaut 1.

On note  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .

Si M est une matrice carrée, on note  ${}^tM$  sa transposée et  $\mathrm{tr}(M)$  sa trace.

On note  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre n à coefficients réels.

## Rappels sur les polynômes d'endomorphisme

On effectue ici quelques rappels utiles sur les polynômes d'endomorphisme d'un espace vectoriel.

Soit E un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ . On note Id l'endomorphisme identité de E.

Pour tout 
$$f$$
 de  $\mathcal{L}(E)$ , et tout  $A = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$  de  $\mathbb{K}[X]$ , on note  $A(f) = \sum_{k=0}^{p} a_k f^k$  (avec la convention  $f^0 = \mathrm{Id}$ ).

Pour tout f de  $\mathcal{L}(E)$ , l'application  $A \mapsto A(f)$  est alors un morphisme d'algèbres de  $\mathbb{K}[X]$  dans  $\mathcal{L}(E)$ .

Rappelons que cela signifie que, pour tous A, B de  $\mathbb{K}[X]$  et pour tous scalaires  $\alpha, \beta$  de  $\mathbb{K}$ , on a :

- $(\alpha A + \beta B)(f) = \alpha A(f) + \beta B(f);$
- si A = 1, alors A(f) = Id;
- $(AB)(f) = A(f) \circ B(f) = B(f) \circ A(f).$

Cas particulier (utile dans la suite du problème):

- Si 
$$E = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$$
,  $f = \sigma$  et  $A = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ , alors  $A(\sigma) = \sum_{k=0}^{p} a_k \sigma^k$ .

- Pour tout 
$$x$$
 de  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ,  $y = A(\sigma)(x)$  est donc la suite de terme général  $y_n = \sum_{k=0}^p a_k x_{n+k}$ .

# I Suites récurrentes linéaires

Soit p un entier naturel.

On dit qu'un élément x de  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  est une suite récurrente linéaire (en abrégé une SRL) d'ordre  $p \geqslant 0$  s'il existe un

polynôme  $A = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$  dans  $\mathbb{K}[X]$  de degré p, tel que  $A(\sigma)(x)$  soit la suite nulle, c'est-à-dire si :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=0}^{p} a_k x_{n+k} = a_p x_{n+p} + a_{p-1} x_{n+p-1} + \dots + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = 0$$
 (I.1)

On dit que la relation I.1 (dans laquelle, rappelons-le,  $a_p$  est non nul) est une relation de récurrence linéaire d'ordre p, dont A est un  $polyn\^ome$  caractéristique.

L'ensemble des suites x de  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  qui obéissent à **I.1** est noté  $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ .

On note  $\mathcal{R}(\mathbb{K})$  l'ensemble de toutes les suites récurrentes linéaires, quel que soit leur ordre (autrement dit,  $\mathcal{R}(\mathbb{K})$  est la réunion des  $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$  pour tous les polynômes A non nuls dans  $\mathbb{K}[X]$ ).

## I.A - Ordre (et polynôme) minimal d'une suite récurrente linéaire

Soit x une suite récurrente linéaire.

Montrer que l'ensemble  $J_x$  des polynômes A tels que  $A(\sigma)(x) = 0$  est un idéal de  $\mathbb{K}[X]$ , non réduit à  $\{0\}$ .

On rappelle qu'il en résulte deux choses :

- d'une part, il existe dans  $J_x$  un unique polynôme unitaire B de degré minimal;
- d'autre part, les éléments de  $J_x$  sont les multiples de B.

Par définition, on dit que B est le polynôme minimal de la suite x, que le degré de B est l'ordre minimal de x, et que la relation  $B(\sigma)(x) = 0$  est la relation de récurrence minimale de x.

## I.B - Quelques exemples

**I.B.1)** Dans  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ , quelles sont les suites récurrentes linéaires d'ordre 0? d'ordre 1?

Quelles sont les suites de  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  dont le polynôme minimal est  $(X-1)^2$ ?

**I.B.2)** On considère la suite x définie par  $x_0=0, x_1=-1, x_2=2$  et par la relation de récurrence linéaire d'ordre  $3: \forall n \in \mathbb{N}, \ x_{n+3}=-3x_{n+2}-3x_{n+1}-x_n$ .

Déterminer le polynôme minimal (et donc l'ordre minimal) de la suite x.

## I.C – L'espace vectoriel $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ et deux cas particuliers

Soit  $A = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$  un élément de  $\mathbb{K}[X]$ , de degré  $p \geqslant 0$ , que sans perdre de généralité on suppose unitaire.

**I.C.1)** Prouver que  $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$  est un sous-espace vectoriel de dimension p de  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  et qu'il est stable par  $\sigma$  (on ne demande pas ici de déterminer une base de  $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ , car c'est l'objet des questions suivantes).

**I.C.2**) Déterminer  $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$  quand  $A = X^p$  (avec  $p \ge 1$ ) et en donner une base.

**I.C.3)** Dans cette question, on suppose  $p \ge 1$  et  $A = (X - \lambda)^p$ , avec  $\lambda$  dans  $\mathbb{K}^*$ .

On note  $E_A(\mathbb{K})$  l'ensemble des x de  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  de terme général  $x_n = Q(n)\lambda^n$ , où Q est dans  $\mathbb{K}_{p-1}[X]$ .

- a) Montrer que  $E_A(\mathbb{K})$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  dont on précisera la dimension.
- b) Montrer l'égalité  $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = E_A(\mathbb{K})$ .

## I.D – Étude de $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ quand A est scindé sur $\mathbb{K}$

Dans cette question, on suppose que le polynôme A est scindé sur  $\mathbb{K}$ .

Plus précisément, on note  $A = X^{m_0} \prod_{k=1}^d (X - \lambda_k)^{m_k}$ , où :

- les scalaires  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d$  sont les racines non nulles distinctes éventuelles de A dans  $\mathbb{K}$ , et  $m_1, m_2, \dots, m_d$  sont leurs multiplicités respectives (supérieures ou égales à 1). Si A n'a pas de racine non nulle, on convient

que 
$$d = 0$$
 et que  $\prod_{k=1}^{a} (X - \lambda_k)^{m_k} = 1$ ;

- l'entier  $m_0$  est la multiplicité de 0 comme racine éventuelle de A. Si 0 n'est pas racine de A, on adopte la convention  $m_0 = 0$ .

Avec ces notations, on a  $\sum_{k=0}^{d} m_k = \deg A = p$ .

2 avril 2012 17:21

En utilisant le théorème de décomposition des noyaux, montrer que  $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$  est l'ensemble des suites  $x = (x_n)_{n \geqslant 0}$  de  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  telles que :

$$\forall n \geqslant m_0, \ x_n = \sum_{k=1}^d Q_k(n) \, \lambda_k^n$$

où, pour tout k de  $\{1,\ldots,d\}$ ,  $Q_k$  est dans  $\mathbb{K}[X]$  avec deg  $Q_k < m_k$ .

Remarque : si d=0, la somme  $\sum_{k=1}^{d} Q_k(n) \lambda_k^n$  est par convention égale à 0.

# II Matrices de Hankel associées à une suite récurrente linéaire

Soit x dans  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ . Pour tout entier n de  $\mathbb{N}^*$ , on note  $H_n(x)$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  définie par

$$\forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2, [H_n(x)]_{i,j} = x_{i+j-2}$$

On a par exemple 
$$H_2(x) = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}$$
,  $H_3(x) = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$  et  $H_4(x) = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix}$ .

On identifie toute matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  avec l'endomorphisme de  $\mathbb{K}^n$  qui lui est associé dans la base canonique. On identifie de même tout élément de  $\mathbb{K}^n$  avec la matrice-colonne qui lui correspond.

## II.A - Calcul du rang de $H_n(x)$ quand x est une suite récurrente linéaire

Dans cette section, x est une suite récurrente linéaire d'ordre minimal  $p \ge 1$  et de polynôme minimal B.

**II.A.1)** Montrer que la famille  $(\sigma^k(x))_{0 \leq k \leq p-1}$  est une base de  $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$ .

En déduire, pour tout 
$$n$$
 de  $\mathbb{N}^*$ , le rang de la famille  $(\sigma^k(x))_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ .

II.A.2) Montrer que si  $n \geqslant p$ , l'application  $\varphi_n : \begin{cases} \mathcal{R}_B(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^n \\ v \mapsto (v_0, \dots, v_{n-1}) \end{cases}$  est injective.

En déduire que si  $n \ge p$ , alors rang $(H_n(x)) = p$ .

Remarque : il est clair que ce résultat reste vrai si p=0 (car la suite x et les matrices  $H_n(x)$  sont nulles).

### II.B - Détermination de la récurrence minimale d'une suite récurrente linéaire

Soit x une suite récurrente linéaire non nulle, d'ordre  $m \ge 1$ . Soit  $p = \operatorname{rang}(H_m(x))$ .

II.B.1) Montrer que x est d'ordre minimal p et que le noyau de  $H_{p+1}(x)$  est une droite vectorielle dont un vecteur directeur peut s'écrire  $(b_0, \ldots, b_{p-1}, 1)$ , où  $b_0, \ldots, b_{p-1}$  sont dans  $\mathbb{K}$ .

II.B.2) Avec ces notations, montrer que le polynôme minimal de x est  $B = X^p + b_{p-1}X^{p-1} + \cdots + b_1X + b_0$ .

## II.C - Étude d'un exemple

Dans cette question, on considère la suite  $x=(x_n)_{n\geqslant 0}$  définie par

$$x_0 = 1$$
,  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = 0$ , et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $x_{n+4} = x_{n+3} - 2x_{n+1}$ 

- II.C.1) Dans le langage informatique de votre choix (que vous préciserez), écrire une procédure (ou fonction) de paramètre un entier naturel n et renvoyant la liste (ou la séquence, ou le vecteur) des  $x_k$  pour  $0 \le k \le n$ .
- **II.C.2)** Préciser le rang de  $H_n(x)$  pour tout entier n de  $\mathbb{N}^*$  et indiquer l'ordre minimal de la suite x.
- **II.C.3)** Déterminer la relation de récurrence minimale de la suite x.
- II.C.4) Donner une formule permettant pour tout  $n \ge 1$  de calculer directement  $x_n$ .
- **II.C.5)** On décide de modifier *uniquement* la valeur de  $x_0$ , en posant cette fois  $x_0 = \frac{1}{2}$ .

Avec cette modification, reprendre rapidement l'étude des questions II.C.2 et II.C.3.

# Valeurs propres des matrices de Hankel réelles

Dans toute cette partie, n désigne un entier supérieur ou égal à 3.

On note p = [(n+1)/2] la partie entière de (n+1)/2.

On a donc n = 2p si n est pair, et n = 2p - 1 si n est impair.

 $\mathbb{R}^n$  est muni de sa structure euclidienne canonique dont le produit scalaire est noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et la norme associée est notée  $\|\cdot\|$ .

Un élément de  $x = (x_1, \dots, x_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  est dit ordonné s'il vérifie si  $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \dots \geqslant x_n$ .

On dit qu'une matrice  $M=(m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est une matrice de Hankel s'il existe  $a=(a_0,\ldots,a_{2n-2})\in$  $\mathbb{R}^{2n-1}$  tel que pour tous i et j de  $\{1,\ldots,n\}$ ,  $m_{i,j}=a_{i+j-2}$ . Une telle matrice est notée M=H(a).

#### III.A - Préliminaires

III.A.1) Montrer que si M est une matrice de Hankel de taille n alors elle admet n valeurs propres réelles  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  (chacune étant répétée autant de fois que sa multiplicité) que l'on peut classer dans l'ordre décroissant  $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$ .

On note alors  $\operatorname{Spo}(M)=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$  le spectre ordonné de la matrice M, c'est-à-dire le n-uplet ordonné des valeurs propres de M.

On s'intéresse au problème suivant : à quelles conditions un n-uplet ordonné de réels peut-il être le n-uplet ordonné des valeurs propres d'une matrice de Hankel de taille n?

III.A.2) Montrer que si  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  alors le n-uplet  $(\lambda, \dots, \lambda)$  n'est pas le n-uplet ordonné des valeurs propres d'une matrice de Hankel de taille n.

## III.B - Une première condition nécessaire

Soit  $a = (a_0, \ldots, a_{2n-2})$  un élément de  $\mathbb{R}^{2n-1}$  et M = H(a). On note  $\operatorname{Spo}(M) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ . On définit deux vecteurs  $v = (v_1, \dots, v_n)$  et  $w = (w_1, \dots, w_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  par

$$\begin{cases} v_i = \sqrt{2i - 1} \ a_{2(i-1)} \text{ et } w_i = \frac{1}{\sqrt{2i - 1}} & \text{si } i \in \{1, \dots, p\} \\ v_i = \sqrt{2n - 2i + 1} \ a_{2(i-1)} \text{ et } w_i = \frac{1}{\sqrt{2n - 2i + 1}} & \text{si } i \in \{p + 1, \dots, n\} \end{cases}$$

On pose enfin  $K_n = n - ||w||^2$ .



III.B.1) Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{k=0}^{n-1} a_{2k} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_k^2 + \sum_{k=n}^{2n-2} (2n-k-1) a_k^2$$

**III.B.2)** Montrer que  $\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$  et  $||v||^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$ .

III.B.3) Montrer que  $\sum_{1 \le i < j \le n} (\lambda_i - \lambda_j)^2 = n \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 - \langle v, w \rangle^2$  et en déduire l'inégalité :

$$\sum_{1 \le i < j \le n} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \geqslant K_n \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$$
(III.1)

III.B.4) Vérifier que si n = 3, la condition III.1 équivaut à :  $2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) \ge 3(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3)$ .

### III.C - D'autres conditions nécessaires

Dans cette partie, on *admet* le résultat suivant : si A et B sont deux matrices de  $S_n(\mathbb{R})$  dont les valeurs propres respectives (avec répétitions éventuelles) sont  $\alpha_1 \ge \ldots \ge \alpha_n$  et  $\beta_1 \ge \ldots \ge \beta_n$  alors

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_{n+1-i} \leqslant \operatorname{tr}(AB) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i \tag{III.2}$$

Soit  $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  définie par

$$b_{1,2p-1} = 1$$
  $b_{2p-1,1} = 1$   $b_{p,p} = -2$ 

tous les autres coefficients de B étant nuls (on rappelle que p désigne la partie entière de (n+1)/2).

III.C.1) Déterminer le spectre ordonné de la matrice B.

**III.C.2)** Soit  $a = (a_0, \dots, a_{2n-2})$  un élément de  $\mathbb{R}^{2n-1}$  et M = H(a).

On note  $\operatorname{Spo}(M) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ .

Établir que

$$\lambda_1 - \lambda_{n-1} - 2\lambda_n \geqslant 0$$
 et  $2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_n \geqslant 0$  (III.3)

### III.D - Cas n = 3

Soient  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  trois réels vérifiant

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3$$
  $\lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3 \geqslant 0$   $2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 \geqslant 0$ 

On définit la matrice de Hankel  $M = H(a, b, c, b, a) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$ , où a, b, c sont réels.

III.D.1) Calculer les valeurs propres de M (sans chercher à les ordonner).

**III.D.2)** Expliciter a, b, c (avec  $b \ge 0$ ) en fonction de  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , de telle sorte que  $\text{Spo}(M) = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ .

III.D.3) Que peut-on déduire du résultat précédent, quant à la condition III.3 dans le cas n = 3? En utilisant un triplet ordonné  $(\lambda, 1, 1)$ , montrer que pour n = 3, la condition III.1 n'est pas suffisante.



