

**EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE MP**

---

**MATHEMATIQUES 1****Durée : 4 heures**

---

*N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

---

|                                          |
|------------------------------------------|
| <b>Les calculatrices sont autorisées</b> |
|------------------------------------------|

**Le sujet est composé de trois exercices et d'un problème, tous indépendants.**

## EXERCICE 1 : NORMES ÉQUIVALENTES

On note  $E$  l'espace vectoriel des applications de classe  $C^1$  définies sur l'intervalle  $[0;1]$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

1. On pose pour  $f \in E$  :

$$\|f\| = |f(0)| + 2 \int_0^1 |f'(t)| dt \quad \text{et} \quad \|f\|' = 2|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)| dt .$$

- (a) Démontrer que  $\|\cdot\|$  définit une norme sur  $E$ .

De même,  $\|\cdot\|'$  est une norme sur  $E$ , il est inutile de le démontrer.

- (b) i. Donner la définition de deux normes équivalentes.

ii. Démontrer que les deux normes  $\|\cdot\|$  et  $\|\cdot\|'$  sont équivalentes sur  $E$ .

2. Toutes les normes sur  $E$  sont-elles équivalentes à la norme  $\|\cdot\|$  ?

## EXERCICE 2 : CONTINUITÉ D'UNE FONCTION DÉFINIE PAR INTÉGRALE

1. Soient  $I$  et  $J$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$  et  $g$  une application de  $I \times J$  dans  $\mathbb{R}$  telle que pour tout  $x \in I$ , la fonction  $t \mapsto g(x, t)$  soit intégrable sur  $J$ .

On pose, pour tout  $x \in I$ ,  $f(x) = \int_J g(x, t) dt$ .

Donner toutes les hypothèses du théorème de continuité d'une fonction définie par intégrale dépendant d'un paramètre permettant de conclure que la fonction  $f$  est continue sur  $I$ .

2. On pose, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f_1(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{1+t^2} dt$ .

Démontrer que la fonction  $f_1$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

3. On pose, pour tout  $x \in [0, +\infty[$ ,  $f_2(x) = \int_0^{+\infty} x e^{-xt} dt$ .

Calculer  $f_2(x)$  pour tout  $x \in [0, +\infty[$ .

La fonction  $f_2$  est-elle continue sur  $[0, +\infty[$  ?

Que peut-on en conclure concernant l'hypothèse de domination ?

## EXERCICE 3 : UNE INTÉGRALE CURVILIGNE

Calculer l'intégrale curviligne  $\int_{\gamma} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$  le long du cercle  $\gamma$  de centre 0 et de rayon 1, orienté dans le sens direct.

## PROBLÈME : COMPARAISON DE CONVERGENCES

Dans tout le problème,  $\sum f_n$  est une série de fonctions définies sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et à valeurs réelles.

### Partie I

Une série de fonctions  $\sum f_n$  converge absolument sur  $I$  lorsque, pour tout  $x \in I$ , la série  $\sum |f_n(x)|$  converge. Dans les deux premières questions on supposera, pour simplifier les démonstrations, que toutes les fonctions  $f_n$  sont bornées sur  $I$ .

1. (a) Rappeler la définition de la convergence normale de la série de fonctions  $\sum f_n$  sur  $I$ .  
(b) On suppose que la série de fonctions  $\sum f_n$  converge normalement sur  $I$ , démontrer que  $\sum f_n$  converge absolument sur  $I$ .
2. On suppose que la série de fonctions  $\sum f_n$  converge normalement sur  $I$ , démontrer que  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $I$ .  
On pourra démontrer que la suite des restes converge uniformément sur  $I$  vers la fonction nulle ou utiliser toute autre méthode.
3. On pose pour  $x \in [0; 1]$ ,  $f_n(x) = (-1)^n \left( \frac{x^2 + n}{n^2} \right)$ .  
Démontrer que la série de fonctions  $\sum f_n$  converge simplement puis converge uniformément sur  $[0; 1]$  mais ne converge absolument en aucune valeur de  $[0; 1]$ .
4. Si la série de fonctions  $\sum f_n$  converge absolument sur  $I$ , a-t-on nécessairement  $\sum f_n$  qui converge uniformément sur  $I$ ?  
On attend une réponse détaillée et on pourra utiliser une série entière.

### Partie II

Dans toute cette partie,  $(\alpha_n)_{n \geq 1}$  est une suite décroissante de réels positifs,  $I = [0; 1[$  et pour tout  $x \in I$ ,  $f_n(x) = \alpha_n x^n (1 - x)$ .

5. Justifier que la suite  $(\alpha_n)_{n \geq 1}$  est bornée et que la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge simplement sur  $I$ .
6. (a) Calculer pour  $n \geq 1$ ,  $\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in I} |f_n(x)|$ .  
(b) Démontrer que la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge normalement sur  $I$  si et seulement si la série de réels positifs  $\sum_{n \geq 1} \frac{\alpha_n}{n}$  converge.

7. (a) Calculer pour tout  $x \in I$ ,  $\sum_{k=n+1}^{\infty} x^k$ .
- (b) Si on suppose que la suite  $(\alpha_n)_{n \geq 1}$  converge vers 0, démontrer que la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge uniformément sur  $I$ .  
On pourra observer que pour  $k \geq n + 1$ ,  $\alpha_k \leq \alpha_{n+1}$ .
- (c) Réciproquement, démontrer que si la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge uniformément sur  $I$ , alors la suite  $(\alpha_n)_{n \geq 1}$  converge vers 0.
8. Dans chacun des cas suivants, donner, en détaillant, un exemple de suite décroissante de réels positifs  $(\alpha_n)_{n \geq 1}$  telle que :
- (a) La série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge normalement sur  $I$ .
- (b) La série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} f_n$  ne converge pas uniformément sur  $I$ .
- (c) La série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge uniformément sur  $I$  mais ne converge pas normalement sur  $I$ .
9. Résumer à l'aide d'un schéma toutes les implications possibles, pour une série de fonctions quelconque, entre les convergences : normale, uniforme, absolue et simple sur  $I$ .

**Fin de l'énoncé**