A 2011 MATH II PSI

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH.
SUPAERO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH
MINES DE SAINT ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (Filière PSI).
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS 2011

SECONDE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière PSI

(Durée de l'épreuve : trois heures)

L'usage de l'ordinateur ou de la calculatrice est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
Cycle international, ENSTIM, TELECOM INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - PSI

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

COURSE-POURSUITE.

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, $\mathbb{R}^+$ l'ensemble des nombres réels positifs, et $\mathbb{R}^{+*}$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs. On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et par $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels strictement positifs.

Soit $\lambda : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lambda(0) = 0$. L'objet du problème est l'étude de l'équation différentielle

$$E(\lambda) \, : \, x'(t) = \frac{2}{x(t) - \lambda(t)}.$$

On dira qu'une fonction ϕ de classe C^1 sur un intervalle non vide I est solution de $E(\lambda)$ si pour tout $t \in I, \phi(t) \neq \lambda(t)$ et $\phi'(t) = \dfrac{2}{\phi(t) - \lambda(t)}$.

Soit $x_0 > 0$ un réel strictement positif. On appelle solution de $E(\lambda, x_0)$ une fonction $\phi : [0, a[\to \mathbb{R}$ ($a \in \mathbb{R}^{+*}$ ou $a = +\infty$) de classe C^1 telle que

$$\phi(0) = x_0, \text{ et } \forall t \in [0, a[\, , \, \phi(t) \neq \lambda(t) \, \text{et} \, \phi'(t) = \frac{2}{\phi(t) - \lambda(t)}.$$

Une solution de $E(\lambda, x_0)$ est dite maximale si ou bien elle est définie sur $[0, +\infty[$ ou bien elle est définie sur un intervalle $[0, a[$ ($a > 0$) et elle n'est pas la restriction d'une solution définie sur un intervalle plus grand $[0, a'[$ ($a' > a$).

On admettra le résultat suivant :

Théorème 1.

1] Soit $t_0 > 0$ et $y_0 \in]\lambda(t_0), +\infty[$. Alors il existe $\epsilon > 0$ tel que le problème de Cauchy

$$x(t_0) = y_0, \text{ et } \forall t \in]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[\, , \, x(t) \neq \lambda(t) \, \text{et} \, x'(t) = \frac{2}{x(t) - \lambda(t)}$$

possède une unique solution ϕ définie sur $]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$.

2] Soient I, J deux intervalles inclus dans $[0, +\infty[$. On considère deux solutions $\psi : I \to \mathbb{R}$, $\varphi : J \to \mathbb{R}$ de $E(\lambda)$ de classe C^1. On suppose qu'il existe $t_1 \in I \cap J$ tel que $\psi(t_1) = \varphi(t_1)$. Alors, ψ et φ coincident sur $I \cap J$.

3] Pour tout $x_0 > 0$ il existe une unique solution maximale, notée $t \mapsto \phi(t, x_0)$, de $E(\lambda, x_0)$. Son domaine de définition est alors noté $[0, T(x_0)[$; $T(x_0)$ est appelé temps de vie de la solution maximale $t \mapsto \phi(t, x_0)$. Ou bien $T(x_0) \in \mathbb{R}^{+*}$, ou bien $T(x_0) = +\infty$.

Le problème de Cauchy $E(\lambda, x_0)$ représente une course poursuite entre λ le lièvre et x la tortue. Au temps $t = 0$, le lièvre est à l'origine $0 = \lambda(0)$ tandis que la tortue est en $x_0 > 0$. On verra que si $T(x_0) < +\infty$ alors le lièvre rattrape la tortue, on dit qu'il y a capture. Si $T(x_0) = +\infty$ alors la tortue parvient à s'échapper.

On pourra utiliser librement les résultats de la Partie 1 pour traiter la suite, même si on ne les a pas démontrés.

1 Généralités.

1) On fixe $x_0 > 0$. Soit $\phi(\cdot, x_0) : [0, T(x_0)[\to \mathbb{R}$ la solution maximale de $E(\lambda, x_0)$. Montrer que $\forall t \in [0, T(x_0)[\,,\ \phi(t, x_0) > \lambda(t)$. Préciser le sens de variation de la fonction $\phi(\cdot, x_0)$ et montrer qu'elle admet une limite réelle ou égale à $+\infty$ en $T(x_0)$.

2) Dans cette question et la suivante on suppose que $T(x_0) < +\infty$. Montrer que si

$$\lim_{t \to T(x_0),\, t < T(x_0)} \phi(t, x_0) = +\infty$$

alors la dérivée (par rapport à t) $\phi'(t, x_0)$ est bornée sur $[0, T(x_0)[$. Aboutir à une contradiction et conclure qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\lim_{t \to T(x_0),\, t < T(x_0)} \phi(t, x_0) = l$.

3) Montrer que $\lambda(T(x_0)) \leq l$. On suppose que $\lambda(T(x_0)) < l$. Prouver alors que $t \mapsto \phi(t, x_0)$ se prolonge en une fonction de classe C^1 sur le segment $[0, T(x_0)]$ solution de $E(\lambda)$. Puis, en appliquant les parties 1] et 2] du Théorème 1 avec $y_0 = l$, $t_0 = T(x_0)$ et $J =]t_0 - \epsilon, t_0]$, montrer que l'on contredit le caractère maximal de la solution $t \mapsto \phi(t, x_0)$. Conclure que $l = \lambda(T(x_0))$. On prolonge alors $t \mapsto \phi(t, x_0)$ par continuité en $T(x_0)$ en posant $\phi(T(x_0), x_0) = \lambda(T(x_0))$.

4) Soient deux réels x_0 et y_0 tels que $0 < x_0 < y_0$. On suppose qu'il existe $t_1 \in [0, \min(T(x_0), T(y_0))[$ tel que $\phi(t_1, x_0) = \phi(t_1, y_0)$. En appliquant les parties 1] et 2] du Théorème 1 montrer que cela entraîne l'égalité des deux solutions maximales $\phi(\cdot, x_0)$, $\phi(\cdot, y_0)$ et, aboutir à une contradiction. En déduire que pour tout $t \in [0, \min(T(x_0), T(y_0))[$, $\ \phi(t, x_0) < \phi(t, y_0)$.

5) On suppose toujours $0 < x_0 < y_0$. En déduire que $T(x_0) \leq T(y_0)$. (On pourra, en raisonnant par l'absurde, supposer que $T(x_0) > T(y_0)$ et utiliser les questions 4), 3) et 1)).

2 Etude de deux exemples.

6) Soient $x_0 > 0$ et λ_0 la fonction nulle : $\forall t \geq 0,\ \lambda_0(t) = 0$. Expliciter la solution maximale de $E(\lambda_0, x_0)$. Peut il y avoir capture ?

On considère la fonction $\lambda_1 : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in [0, 1],\ \lambda_1(t) = 4(1 - \sqrt{1-t});\ \forall t \geq 1,\ \lambda_1(t) = 4.$$

7) Montrer qu'il existe un réel $a > 0$ que l'on précisera, tel que la fonction ϕ_0 déterminée par

$$\forall t \in [0, 1],\ \phi_0(t) = a - (a-2)\sqrt{1-t},$$

définit la solution maximale de $E(\lambda_1, 2)$. Puis prouver que $T(2) = 1$.

Jusqu'à la fin de cette partie **2** on considère une autre solution de $E(\lambda_1)$, $\phi = \phi(\cdot, x_0)$, telle que : $\phi(0) = x_0 \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{2\}$.

8) Pour chaque $t \in [0, \min(1, T(x_0))[$, donner une expression simple de $\frac{d}{dt}\big(\ln|\phi(t) - \phi_0(t)|\big)$ en fonction de

$$-\big(\phi(t) - \lambda_1(t)\big)\sqrt{1-t}\,.$$

9) Montrer que la fonction

$$t \mapsto C(t) = \ln|\phi(t) - \phi_0(t)| - \frac{2\sqrt{1-t}}{\phi(t) - \phi_0(t)}$$

est bien définie sur $[0, \min(1, T(x_0))[$ et y est constante. (On pourra utiliser les questions 4 et 8).

10) On suppose que $x_0 \in]0, 2[$. Prouver que $C(0)$ est supérieur ou égal à $1 + \ln 2$. En supposant $T(x_0) < 1$, calculer $C(T(x_0))$ et aboutir à une contradiction. En déduire que $T(x_0) = 1$.

Dans la question suivante on suppose $x_0 = \phi(0) > 2$.

11) Montrer que $T(x_0) \geq 1$. Puis montrer, en considérant $C(t)$ quand $t \to 1$ par valeurs inférieures, que $T(x_0)$ ne peut pas être égal à 1. Enfin montrer, en résolvant l'équation $E(\lambda_1)$ *pour* $t \geq 1$, que $T(x_0)$ ne peut pas être un nombre réel. Conclure. (On rappelle que $\forall t \geq 1,\ \lambda_1(t) = 4$).

3 Une condition suffisante pour qu'il n'y ait pas de capture.

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = 0$. On rappelle que la fonction λ du problème $E(\lambda)$ vérifie ces deux hypothèses. On note

$$M(f) = \sup_{0<x<y;\ x,y \in \mathbb{R}^{+*}} \frac{|f(y) - f(x)|}{\sqrt{y-x}} \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}.$$

12) Soient $t, s \in [0, 1]$ tels que $0 \leq s < t$. Déterminer une fonction $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\frac{|\lambda_1(1-s) - \lambda_1(1-t)|}{\sqrt{t-s}} = \frac{F(s/t)}{1 + \sqrt{s/t}}.$$

En déduire que $M(\lambda_1) = 4$. On rappelle que λ_1 a été introduite juste avant la Question 7.

Dorénavant et jusqu'à la fin du problème, on suppose que la fonction λ intervenant dans l'équation différentielle $E(\lambda)$ vérifie $M(\lambda) < 4$. On se propose alors de montrer qu'il n'y a pas de capture, c'est à dire que pour tout $x_0 > 0$, $T(x_0) = +\infty$.

On raisonne par l'absurde, pour aboutir à une contradiction. Soit donc $x_0 > 0$ tel que la solution maximale, notée $t \mapsto x(t)$, de $E(\lambda, x_0)$ ait un temps de vie $T(x_0) < +\infty$ (fini).

13) Montrer que $M(\lambda)$ est strictement positif. (On pourra utiliser la question 6).

Soit un réel $r > 0$. On désigne par $\widehat{\lambda}_r$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \widehat{\lambda}_r(t) = \frac{1}{r}\lambda(r^2 t).$$

On admettra que $M(\widehat{\lambda}_r) = M(\lambda)$.

14) Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{R}^{+*}$, que l'on précisera, tel que la solution maximale $\widehat{x}$ de $E(\widehat{\lambda}_r, \frac{1}{r}x_0)$ a un temps de vie égal à 1 et peut être prolongée par continuité en 1 en posant $\widehat{x}(1) = \lambda(1)$. (On pourra montrer que $\widehat{x}$ est de la forme $t \mapsto \frac{1}{r}x(bt)$ où b est une constante à préciser).

Quitte à remplacer (λ, x_0) par $(\widehat{\lambda}_r, \frac{1}{r}x_0)$, on peut donc supposer que la solution maximale $t \mapsto x(t)$ de $E(\lambda, x_0)$ a un temps de vie $T(x_0) = 1$ et peut être prolongée par continuité en 1 en posant $x(1) = \lambda(1)$.

15) Montrer que

$$\forall t \in [0,1]\,,\; x(t) - \lambda(t) \leq M(\lambda)\sqrt{1-t},$$

et en déduire que

$$\forall t \in [0,1]\,,\; x(1) - x(t) \geq \frac{4}{M(\lambda)}\sqrt{1-t}.$$

16) Montrer alors que

$$\forall t \in [0,1]\,,\; x(t) - \lambda(t) \leq (M(\lambda) - \frac{4}{M(\lambda)})\sqrt{1-t}.$$

(On utilisera la deuxième inégalité de la question précédente et la définition de $M(\lambda)$).

17) Soit μ un réel > 0 tel que

$$\forall t \in [0,1]\,,\; x(t) - \lambda(t) \leq \mu\sqrt{1-t}.$$

Montrer alors que

$$\forall t \in [0,1]\,,\; x(t) - \lambda(t) \leq (M(\lambda) - \frac{4}{\mu})\sqrt{1-t}.$$

Conclure que $M(\lambda) - \dfrac{4}{\mu}$ est strictement positif.

On rappelle que $M(\lambda) < 4$.

18) Déduire de ce qui précède l'existence d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs vérifiant :

$$u_0 = M(\lambda), \quad \forall n \in \mathbb{N},\; u_{n+1} = M(\lambda) - \frac{4}{u_n}\,.$$

Etudier la convergence de cette suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et aboutir à une contradiction. En déduire que pour tout réel $x_0 > 0$, $T(x_0) = +\infty$.

Fin du Problème

L'équation $E(\lambda)$ a été introduite par Loewner. Elle joue un rôle important dans diverses branches des mathématiques (analyse complexe, processus stochastiques...etc).