



Le but de ce problème est d'établir **partie V** une identité relative à la fonction Gamma, due à Euler, puis d'en présenter **partie VI** une application à la distribution de Boltzmann dans un gaz de particules.

I La fonction Gamma

On définit la fonction Γ d'Euler, pour tout réel $x > 0$, par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

- I.A** – Montrer que la fonction $t \rightarrow e^{-t} t^{x-1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si, $x > 0$.
- I.B** – Justifier que la fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement positive sur $]0, +\infty[$.
- I.C** – Exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de x et de $\Gamma(x)$.
- I.D** – Calculer $\Gamma(n)$ pour tout entier naturel n , $n \geq 1$.

II Formule de Stirling

Pour tout entier $k \geq 2$, on pose :

$$u_k = \ln k - \int_{k-1}^k \ln t dt$$

- II.A** – À l'aide de deux intégrations par parties, montrer que :

$$u_k = \frac{1}{2} (\ln k - \ln(k-1)) - \frac{1}{2} \int_{k-1}^k \frac{(t-k+1)(k-t)}{t^2} dt$$

- II.B** – Pour tout entier $k \geq 2$, on note :

$$w_k = \frac{1}{2} \int_{k-1}^k \frac{(t-k+1)(k-t)}{t^2} dt$$

Justifier la convergence de la série $\sum_{k \geq 2} w_k$.

En déduire qu'il existe un nombre réel a tel que :

$$\ln n! = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + a + v_n$$

où $v_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} w_k$.

- II.C** – En utilisant encore une intégration par parties, montrer que :

$$\left| w_k - \frac{1}{12} \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^2} \right| \leq \frac{1}{6} \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^3}$$

- II.D** – En déduire que

$$\left| v_n - \frac{1}{12n} \right| \leq \frac{1}{12n^2}$$

puis que :

$$\ln n! = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + a + \frac{1}{12n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Dans la suite on admettra que $a = \frac{1}{2} \ln(2\pi)$ et on pourra utiliser la formule de Stirling :

$$\ln n! = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + \frac{1}{12n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

III L'identité d'Euler

Dans cette partie, nous allons établir l'identité d'Euler suivante :

$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)} \quad (\text{III.1})$$

On désigne par $(f_n)_{n \geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $]0, +\infty[$ par :

$$f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} & \text{si } t \in]0, n[\\ 0 & \text{si } t \geq n \end{cases}$$

et on définit pour tout réel $x > 0$ les suites $(I_n(x))_{n \geq 1}$ et $(J_n(x))_{n \geq 0}$ par :

$$I_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt$$
$$J_n(x) = \int_0^1 (1-t)^n t^{x-1} dt$$

III.A – Montrer que pour tout entier n , $n \geq 1$, la fonction f_n est continue et intégrable sur $]0, +\infty[$.

III.B – Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(x) = \Gamma(x)$$

III.C – Montrer que, pour tout entier n , $n \geq 0$,

$$\forall x > 0, \quad J_{n+1}(x) = \frac{n+1}{x} J_n(x+1)$$

III.D – En déduire que, pour tout $x > 0$,

$$J_n(x) = \frac{n!}{x(x+1) \cdots (x+n-1)(x+n)}$$

III.E – Établir l'identité d'Euler (**III.1**).

IV Une intégrale à paramètre

Dans toute la suite, on définit une fonction h sur $\mathbb{R}$ par

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$u \longmapsto u - [u] - 1/2$$

où la notation $[u]$ désigne la partie entière de u .

IV.A – Dessiner soigneusement le graphe de l'application h sur l'intervalle $[-1, 1]$.

IV.B – Montrer que la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$H(x) = \int_0^x h(t) dt$$

est continue, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et périodique de période 1.

IV.C – À l'aide d'une intégration par parties, justifier, pour $x > 0$, la convergence de l'intégrale suivante :

$$\int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{u+x} du$$

IV.D – L'application $u \longmapsto \frac{h(u)}{u+x}$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+$?

IV.E – Soit φ l'application définie pour tout $x > 0$ par :

$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{u+x} du$$

En reprenant l'intégration par parties de la **question IV.C**, démontrer que l'application φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $x > 0$,

$$\varphi'(x) = - \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{(u+x)^2} du$$

V Une autre identité due à Euler

Nous allons maintenant établir une autre formule importante due à Euler, valable pour tout $x > 0$:

$$\ln \Gamma(x+1) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln x - x + \ln \sqrt{2\pi} - \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{x+u} du$$

où h est l'application définie à la **partie IV**.

On fixe donc $x > 0$ et pour tout entier naturel n , on définit $F_n(x)$ par :

$$F_n(x) = \ln \left(\frac{n! n^{x+1}}{(x+1)(x+2)\dots(x+n+1)} \right)$$

V.A – Montrer que pour tout entier naturel i :

$$\int_{x+i}^{x+i+1} \ln t dt = \ln(x+i) - \int_i^{i+1} \frac{u-i-1}{u+x} du$$

V.B – En déduire que :

$$F_n(x) = G_n(x) - \int_0^{n+1} \frac{h(u)}{u+x} du$$

où

$$G_n(x) = \ln n! + (x+1) \ln n - \left(x+n+\frac{3}{2}\right) \ln(x+n+1) + n+1 + \left(x+\frac{1}{2}\right) \ln x$$

V.C –

V.C.1) En utilisant la formule de Stirling, montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln x - x + \ln \sqrt{2\pi}$$

V.C.2) En déduire que :

$$\ln \Gamma(x+1) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln x - x + \ln \sqrt{2\pi} - \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{u+x} du$$

V.D – Montrer que pour tout réel x strictement positif,

$$\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \ln x + \frac{1}{2x} + \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{(u+x)^2} du$$

VI Distribution de Boltzmann

VI.A – Soient $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ quatre nombres réels strictement positifs deux à deux distincts et deux nombres réels strictement positifs E et N . Soit Ω la partie, supposée non vide, formée des quadruplets $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ de $\mathbb{R}_+^4$ vérifiant :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = N \\ \varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 + \varepsilon_3 x_3 + \varepsilon_4 x_4 = E \end{cases}$$

VI.A.1) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^4$.

Montrer que f admet un maximum sur Ω .

On note alors $a = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \Omega$ un point en lequel ce maximum est atteint.

VI.A.2) Montrer que si $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \Omega$ alors x_3 et x_4 peuvent s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} x_3 &= ux_1 + vx_2 + w \\ x_4 &= u'x_1 + v'x_2 + w' \end{aligned}$$

où l'on donnera explicitement u, v, u', v' en fonction de $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$.

VI.A.3) En supposant qu'aucun des nombres a_1, a_2, a_3, a_4 n'est nul, déduire que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + u \frac{\partial f}{\partial x_3}(a) + u' \frac{\partial f}{\partial x_4}(a) &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) + v \frac{\partial f}{\partial x_3}(a) + v' \frac{\partial f}{\partial x_4}(a) &= 0 \end{aligned}$$

VI.A.4) Montrer que le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $(1, 0, u, u')$ et $(0, 1, v, v')$ admet un sous-espace supplémentaire orthogonal engendré par les vecteurs $(1, 1, 1, 1)$ et $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$.

VI.A.5) En déduire l'existence de deux réels α, β tels que pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ on ait

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \alpha + \beta \varepsilon_i$$

VI.B – On définit la fonction F pour tout $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ de $\mathbb{R}_+^4$ par

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = - \sum_{i=1}^4 \ln \Gamma(1 + x_i)$$

On suppose qu'il existe $\bar{N} = (N_1, N_2, N_3, N_4) \in \Omega$, les nombres N_1, N_2, N_3, N_4 étant tous les quatre non nuls, tel que

$$\max_{x \in \Omega} F(x) = F(\bar{N})$$

Montrer l'existence de deux nombres réels λ et μ vérifiant pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4\}$:

$$\ln N_i + \frac{1}{2N_i} + \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{(u + N_i)^2} du = \lambda + \mu \varepsilon_i$$

VI.C – Pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, on pose

$$\theta(N_i) = \frac{1}{2N_i} + \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{(u + N_i)^2} du$$

VI.C.1) Montrer que pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4\}$

$$0 < \theta(N_i) < \frac{1}{N_i}$$

VI.C.2) Montrer l'existence d'un réel K strictement positif tel que pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4\}$

$$N_i = K e^{\mu \varepsilon_i} e^{-\theta(N_i)}$$

Commentaire

Les calculs précédents interviennent dans la modélisation de gaz de particules : $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_4$ correspondent à quatre niveaux différents d'énergies et $N_1, \dots, N_4$ aux nombres de particules qui se trouvent respectivement au niveau $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_4$ (pour un total de N particules et une énergie totale E). Sous réserve d'équiprobabilité des répartitions, la probabilité d'être dans la configuration (x_1, x_2, x_3, x_4) est donnée par $N!/(N_1! N_2! N_3! N_4!)$.

En mécanique statistique, on pose comme principe que les particules vont se répartir de manière à ce que cette probabilité soit maximale. Cela revient à chercher la répartition qui maximise la somme $-\sum_{i=1}^4 \ln(N_i!)$, assujettie aux conditions de **VI.A**. Il découle alors du dernier résultat établi dans le problème, la **loi de répartition de Boltzmann**, à savoir que pour tous $j, k, j \neq k$, si N_j et N_k sont assez grands : $N_j/N_k \simeq e^{\mu(\varepsilon_j - \varepsilon_k)}$. D'autre part, un calcul utilisant conjointement la formule de Boltzmann donnant l'expression statistique de l'entropie $S = -k_B \ln(N!/(N_1! \dots N_4!))$ et la relation $dS = dE/T$ (pour une transformation à volume constant) permet d'établir que $\mu = -1/k_B T$.

• • • FIN • • •
