



EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PSI

MATHEMATIQUES 2

Durée : 4 heures

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées

Le sujet comporte 7 pages.

Notations

On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et par $\mathbb{N}^*$ l'ensemble $\mathbb{N}$ privé de 0.

Dans tout le problème n est un entier de $\mathbb{N}^*$. On note $\llbracket 1, n \rrbracket$ l'ensemble des entiers k tels que $1 \leq k \leq n$. Dans l'ensemble des matrices à coefficients réels, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées à n lignes, $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices colonnes à n lignes. $O(n)$ désigne le groupe des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On rappelle que toute matrice de $S_n(\mathbb{R})$ est semblable à une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec une matrice de passage orthogonale.

On note $\text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui admet pour coefficients diagonaux les réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ dans cet ordre. L'écriture $A = (a_{i,j})$ signifie que $a_{i,j}$ est le coefficient de la ligne i et de la colonne j de la matrice A . On note tA la matrice transposée de la matrice A et $\text{tr}(A)$ la trace de la matrice carrée A .

Dans tout le problème, on considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ rapporté à une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Le produit scalaire de deux vecteurs $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ est noté $(x|y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ et $\|x\|$ désigne la norme du vecteur x . Soient X et Y les matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ des composantes de x et y dans $\mathcal{B}$, le produit $'XY$ appartient à $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et son unique coefficient est $(x|y)$. On écrira $(x|y) = 'XY$ qui est le produit scalaire canonique des matrices X et Y de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Objectifs

Dans le problème, on définit les ensembles S_n^+ (respectivement S_n^{++}) des matrices symétriques positives (respectivement des matrices symétriques définies positives) ainsi que les endomorphismes autoadjoints associés et on en donne quelques propriétés.

Dans la première partie, on traite deux exemples et on démontre une propriété de compacité d'une partie de $\mathbb{R}^n$ liée au signe des valeurs propres d'un endomorphisme autoadjoint.

Dans les deux parties suivantes, on définit les ensembles S_n^+ et S_n^{++} et on démontre différentes propriétés de leurs éléments : caractérisation par le signe des valeurs propres, racine carrée, propriété de la trace.

Dans la dernière partie, on fait établir des inégalités vérifiées par les endomorphismes autoadjoints associés aux matrices de S_n^{++} . **Les parties III et IV sont indépendantes l'une de l'autre.**

Partie I

Étude de compacité

L'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ est rapporté à une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Soit s un endomorphisme **autoadjoint** de $\mathbb{R}^n$. On considère l'ensemble $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n; (x|s(x)) = 1\}$.

I.1. Dans cette question, on suppose $n = 2$. On considère le plan euclidien muni du repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, e_1, e_2)$ où O est un point du plan. À tout vecteur $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$ de $\mathbb{R}^2$, on associe le point M du plan de coordonnées (x_1, x_2) dans le repère $\mathcal{R}$. On note σ l'ensemble des points du plan ainsi associés aux vecteurs de Σ . Soit S la matrice de l'endomorphisme s relativement à la base $\mathcal{B}$.

I.1.1. On suppose que $S = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces

propres de la matrice S . Pour $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$ dans $\mathbb{R}^2$, calculer le produit scalaire $(x|s(x))$.

Montrer que l'ensemble σ est une ellipse dont on donnera une équation réduite. Tracer cette ellipse dans le plan euclidien muni du repère $\mathcal{R}$.

I.1.2. On suppose que $S = \begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres de S . Déterminer l'ensemble σ et tracer cet ensemble dans le plan euclidien muni du repère $\mathcal{R}$.

I.2. On suppose n entier quelconque de $\mathbb{N}^*$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les n valeurs propres réelles (distinctes ou confondues) de s , chaque valeur propre figurant avec son ordre de multiplicité. On veut montrer que Σ est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si tous les λ_i sont strictement positifs. On ordonne les λ_i dans l'ordre croissant, $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$, et on considère une base orthonormale $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de s avec, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $s(\varepsilon_i) = \lambda_i \varepsilon_i$.

I.2.1. On suppose $\lambda_1 > 0$. Pour $x = \sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_i \in \mathbb{R}^n$, calculer $(x|s(x))$. Montrer que l'ensemble Σ n'est pas vide. Montrer que Σ est une partie bornée de $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'application $x \mapsto (x|s(x))$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ est continue. En déduire que Σ est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$.

I.2.2. On suppose que Σ est une partie compacte non vide de $\mathbb{R}^n$.

I.2.2.1. Montrer que l'inégalité $\lambda_n \leq 0$ est impossible.

I.2.2.2. On suppose $\lambda_1 \leq 0$ et $\lambda_n > 0$ et, pour tout $r \in \mathbb{R}$, on considère le vecteur

$$x_r = r\varepsilon_1 + \sqrt{\frac{1 - \lambda_1 r^2}{\lambda_n}} \varepsilon_n.$$

Montrer que $x_r \in \Sigma$. Calculer $\|x_r\|^2$ et déterminer sa limite lorsque r tend vers $+\infty$. En déduire une contradiction avec l'hypothèse Σ compacte.

Dans la suite du problème, on note S_n^+ (respectivement S_n^{++}) l'ensemble des matrices S de $S_n(\mathbb{R})$ qui vérifient : pour tout X non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXSX \geq 0$ (respectivement ${}^tXSX > 0$). Pour $S \in S_n(\mathbb{R})$, soit s l'endomorphisme autoadjoint de $\mathbb{R}^n$ et soit x le vecteur de $\mathbb{R}^n$ de matrices S et X relativement à la base $\mathcal{B}$. On a donc ${}^tXSX = (x|s(x))$.

Partie II

Racine carrée d'une matrice de S_n^+

Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les n valeurs propres réelles de S comptées autant de fois que leur ordre de multiplicité. Soit $(X_1, \dots, X_n)$ une base orthonormale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de S avec : pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $SX_i = \lambda_i X_i$.

II.1. On veut montrer que $S \in S_n^+$ si et seulement si pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $\lambda_i \geq 0$.

II.1.1. On suppose que $S \in S_n^+$. Montrer que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $\lambda_i \geq 0$.

II.1.2. On suppose que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on a $\lambda_i \geq 0$. Montrer que $S \in S_n^+$.

On montre de même, et on admettra, qu'une matrice $S \in S_n(\mathbb{R})$ appartient à S_n^{++} si et seulement si ses valeurs propres sont strictement positives.

II.1.3. On suppose que $S \in S_n^{++}$ et donc que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda_i > 0$. Montrer que S est inversible et que son inverse $S^{-1} \in S_n^{++}$.

II.2. On suppose de plus que $S \in S_n^+$.

II.2.1. Soient $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$, calculer Δ^2 .

On suppose que $N \in S_n^+$ vérifie $N^2 = D$. On note $(C_1, \dots, C_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ où C_i est la matrice colonne dont le coefficient de la ligne i est égal à 1 et dont les autres coefficients sont nuls. Soient $Y = \sum_{i=1}^n y_i C_i$ et $\mu \in \mathbb{R}$ avec $\mu \geq 0$ tels que $NY = \mu Y$. Montrer que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $\mu^2 y_i = \lambda_i y_i$ puis $\mu y_i = \sqrt{\lambda_i} y_i$. En déduire que $N = \Delta$.

II.2.2. Soit $U \in O(n)$ telle que $S = UD^t U$. Déterminer une matrice $T \in S_n^+$ telle que $T^2 = S$. Montrer que T est unique.

On notera $T = \sqrt{S}$ l'unique matrice T de S_n^+ telle que $T^2 = S$.

II.3. Une détermination de $\sqrt{S}$. On suppose que $S \in S_n^+$ et que $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de S . On note $0 \leq \mu_1 < \dots < \mu_p$ les valeurs propres **distinctes** de S . Pour $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on définit les polynômes d'interpolation de Lagrange aux points $\mu_1, \dots, \mu_p$ par :

$$\text{pour tout } k \in \llbracket 1, p \rrbracket \text{ et tout } a \in \mathbb{R}, L_k(a) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^p \frac{(a - \mu_j)}{(\mu_k - \mu_j)}.$$

II.3.1. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, calculer $L_k(S)X_i$ en distinguant les cas $\mu_k = \lambda_i$ et $\mu_k \neq \lambda_i$ (on rappelle que les X_i définis au début de la partie II, appartiennent à une base orthonormale de vecteurs propres de S avec : pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $SX_i = \lambda_i X_i$).

II.3.2. Soit P le polynôme de degré inférieur ou égal à $p-1$, à coefficients réels tel que : pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $P(\mu_k) = \sqrt{\mu_k}$. Exprimer P comme une combinaison linéaire des polynômes L_k . Calculer $P(S)X_i$ et en déduire que $P(S) \in S_n^+$. Montrer que $P(S) = \sqrt{S}$.

II.3.3. En application des questions précédentes, on prend $S = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. Montrer que $S \in S_3^+$. Exprimer $\sqrt{S}$ comme une combinaison linéaire des matrices S et $I_3 = \text{diag}(1,1,1)$.

Partie III

Une propriété de la trace des matrices de S_n^+

III.1. Soit $S \in S_n^+$.

III.1.1. On considère la matrice $\delta = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ avec : pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\alpha_i \geq 0$. Soit $V = (v_{i,j}) \in O(n)$. Montrer que $\text{tr}(\delta V) \leq \text{tr}(\delta)$.

III.1.2. En déduire que pour tout $U \in O(n)$, on a : $\text{tr}(SU) \leq \text{tr}(S)$.

III.2. Réciproque de la propriété III.1. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $U \in O(n)$, on a $\text{tr}(AU) \leq \text{tr}(A)$. On veut montrer que $A \in S_n^+$.

III.2.1. Un lemme technique. Soient a, b, θ des réels. Montrer qu'il existe un réel φ indépendant de θ , tel que $a \cos(\theta) + b \sin(\theta) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \varphi)$.
En déduire que l'inégalité « pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $a \cos(\theta) + b \sin(\theta) \leq a$ » entraîne $b = 0$.

III.2.2. On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ rapporté à la base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Pour p et q entiers tels que $1 \leq p < q \leq n$, on note Π le plan vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par les vecteurs e_p et e_q . Soit u l'isométrie de $\mathbb{R}^n$ telle que u induit sur le plan Π , orienté par la base (e_p, e_q) , la rotation d'angle θ et telle que u induit l'identité sur l'orthogonal de Π . Écrire la matrice U de u relativement à la base $\mathcal{B}$. Calculer $\text{tr}(AU)$. En déduire que $A \in S_n(\mathbb{R})$.

III.2.3. D'après III.2.2, la matrice A est symétrique. On note l l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice A relativement à la base orthonormale $\mathcal{B}$. On considère une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ formée de vecteurs propres de l . Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on notera $l(v_i) = \beta_i v_i$. On suppose qu'une valeur propre de l est strictement négative et on ordonne la base $\mathcal{V}$ pour que $\beta_1 < 0$. Soit u l'isométrie de $\mathbb{R}^n$ définie sur la base $\mathcal{V}$ par $u(v_1) = -v_1$ et pour $i \neq 1$, $u(v_i) = v_i$. En notant U la matrice de u relativement à la base $\mathcal{B}$, montrer que l'inégalité $\text{tr}(AU) \leq \text{tr}(A)$ conduit à une impossibilité et en déduire que $A \in S_n^+$.

Partie IV

Des inégalités remarquables

Soit $S \in S_n^{++}$ et soit $T \in S_n^{++}$ telles que $T^2 = S$. On note s et t les automorphismes de $\mathbb{R}^n$ de matrices S et T relativement à la base orthonormale $\mathcal{B}$. Soient s^{-1} et t^{-1} les applications réciproques de s et de t . On note $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ les n valeurs propres de s .

IV.1. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer l'inégalité (1) :

$$(1) \quad \left(t(x) \middle| t^{-1}(x) \right)^2 \leq (s(x) \middle| x) (s^{-1}(x) \middle| x).$$

À quelle condition sur x a-t-on égalité ?

IV.2. On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall a \in \mathbb{R}, P(a) = a^2 - (\lambda_1 + \lambda_n)a + \lambda_1 \lambda_n.$$

Pour chaque $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, déterminer le signe de $P(\lambda_i)$.

Soit v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par $v = -P(s) \circ s^{-1}$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, tel que $s(x) = \lambda_i x$. Calculer $v(x)$ et montrer que x est vecteur propre de v . En déduire que la matrice V de v relativement à la base $\mathcal{B}$ vérifie $V \in S_n^+$.

IV.3. Soit x un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$. On considère le polynôme Q défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall a \in \mathbb{R}, Q(a) = (s(x)|x)a^2 - (\lambda_1 + \lambda_n)\|x\|^2 a + (s^{-1}(x)|x)\lambda_1\lambda_n.$$

Déterminer le signe de $Q(0)$ et celui de $Q(1)$. En déduire l'inégalité (2) :

$$(2) \quad (s(x)|x)(s^{-1}(x)|x) \leq \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n} \|x\|^4.$$

IV.4. On suppose que $\lambda_1 < \lambda_n$. Soient v_1 et v_n des vecteurs de norme 1 tels que $s(v_1) = \lambda_1 v_1$ et $s(v_n) = \lambda_n v_n$. Soit $x = v_1 + v_n$. Calculer les produits scalaires $(s(x)|x)$ et $(s^{-1}(x)|x)$. Montrer que le vecteur x vérifie l'égalité dans l'inégalité (2).

Fin de l'énoncé