



CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE MP

---

**MATHEMATIQUES 2****Durée : 4 heures**

---

*N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

---

**Les calculatrices sont autorisées.**

Les candidats peuvent utiliser la calculatrice pour faire leurs calculs et donner directement la réponse sur la copie.

**Ce sujet est composé d'un exercice et d'un problème qui sont indépendants.**

## EXERCICE

### Commutant d'une matrice

Pour  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ , on note  $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / AM = MA\}$  le commutant de la matrice  $A$ .

1. Démontrer que pour  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ,  $C(A)$  est un espace vectoriel.

2. Démontrer, en détaillant, que la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$  est semblable à la matrice

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \text{ Pour cela, on donnera une matrice de passage que l'on notera } P.$$

3. Déterminer le commutant  $C(T)$  de la matrice  $T$ . Déterminer sa dimension.

4. Démontrer que l'application  $M \mapsto P^{-1}MP$  est un automorphisme d'espaces vectoriels de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

Que peut-on en déduire pour la dimension de  $C(A)$  ?

5. (a) Existe-t-il un polynôme annulateur de  $A$  de degré inférieur ou égal à 2 ?

(b) Démontrer alors que  $C(A) = \text{vect} \{I_3, A, A^2\}$ .

(c) En déduire que  $C(A)$  est l'ensemble des polynômes en  $A$ .

Ce résultat reste-t-il vrai pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  ?

## PROBLÈME

### Inégalités sur les déterminants de matrices symétriques

Dans ce problème, on note pour  $n$  entier naturel non nul :

- $S_n$  l'ensemble des matrices symétriques de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,
- $S_n^+$  l'ensemble des matrices symétriques positives de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,
- $S_n^{++}$  l'ensemble des matrices symétriques définies positives de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

On admet que si  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sont  $n$  réels positifs,  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \geq \left( \prod_{i=1}^n x_i \right)^{\frac{1}{n}}$ .

1. *Question préliminaire*

On rappelle qu'une matrice  $S$  appartient à  $S_n^+$ , si  $S$  appartient à  $S_n$  et si, pour toute matrice  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , on a  ${}^tXSX \geq 0$ .

Démontrer qu'une matrice  $S$  de  $S_n$  est élément de  $S_n^+$  si et seulement si toutes les valeurs propres de  $S$  sont positives.

## PARTIE I

2. Soit  $S \in S_n^+$ . Démontrer que  $\sqrt[n]{\det S} \leq \frac{1}{n} \text{trace } S$ .
3. Application : soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
- (a) Démontrer que  ${}^tMM \in S_n^+$ .
- (b) Si  $M = (m_{ij})$ , en déduire l'inégalité  $(\det M)^2 \leq \left(\frac{1}{n}\right)^n \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij}^2\right)^n$ .

## PARTIE II : Théorème de réduction simultanée

4. On se donne deux matrices  $A \in S_n^{++}$  et  $B \in S_n$ . On note  $\mathcal{B}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  et, dans cette base,  $A$  est la matrice d'un produit scalaire  $\varphi$ . On note l'espace euclidien  $E = (\mathbb{R}^n, \varphi)$ . Soit  $\mathcal{B}'$  une base orthonormée de  $E$  et  $R$  la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  vers la base  $\mathcal{B}'$ .
- (a) Justifier que  $I_n = {}^tRAR$ .
- (b) On note  $C = {}^tRBR$ , justifier qu'il existe une matrice orthogonale  $Q$  et une matrice diagonale  $D$  telle que  ${}^tQCQ = D$ .
- (c) Déterminer, en fonction des matrices  $R$  et  $Q$ , une matrice inversible  $P$  telle que :

$$A = {}^tPP \text{ et } B = {}^tPDP \quad (\text{théorème de réduction simultanée})$$

- (d) Dans cette question, on prend l'exemple de la matrice  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Démontrer qu'une matrice inversible  $P$  telle que la matrice  ${}^tPBP$  soit diagonale n'est pas nécessairement une matrice orthogonale.

On pourra, par exemple, utiliser la forme quadratique canoniquement associée à la matrice  $B$ .

5. Démontrer l'inégalité «  $\det(A + B) \geq \det A + \det B$  » dans les deux cas suivants :
- (a)  $A \in S_n^{++}$  et  $B \in S_n^+$ , en utilisant le théorème de réduction simultanée. On pourra remarquer ici que, avec tous les  $\lambda_i \geq 0$ ,  $\prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i) \geq \left(1 + \prod_{i=1}^n \lambda_i\right)$ .
- (b)  $A \in S_n^+$  et  $B \in S_n^+$ , en démontrant d'abord que  $A + B \in S_n^+$  et en considérant les cas où les matrices sont dans  $S_n^+$  sans être dans  $S_n^{++}$ .
6. Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de  $S_n^{++}$  et  $t \in [0, 1]$ . On note  $P$  une matrice inversible et  $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  une matrice diagonale dans le théorème de réduction simultanée.
- (a) Exprimer  $\det(tA + (1-t)B)$  en fonction de  $\det P$ ,  $t$  et les  $\lambda_i$ .
- (b) En utilisant la fonction  $\ln$ , démontrer que pour tout  $i$  entier compris entre 1 et  $n$ ,  $t + (1-t)\lambda_i \geq \lambda_i^{1-t}$ .
- (c) Démontrer que  $\det(tA + (1-t)B) \geq (\det A)^t (\det B)^{1-t}$ .
7. Si  $A$  est une matrice de  $S_n^{++}$  et  $B$  une matrice de  $S_n^+$ , on démontre de même par le théorème de réduction simultanée (par la convexité de la fonction  $x \mapsto \ln(1 + e^x)$ ) le résultat suivant qui est admis :

$$(\det(A + B))^{\frac{1}{n}} \geq (\det A)^{\frac{1}{n}} + (\det B)^{\frac{1}{n}}.$$

- (a) Démontrer que  $S_n^{++}$  est dense dans  $S_n^+$ .
- (b) Démontrer l'inégalité ci-dessus pour  $A$  et  $B$  deux matrices de  $S_n^+$ .

### PARTIE III : Théorème de Choleski

8. Si  $A$  est une matrice de  $S_n^{++}$ , il est possible, par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt, de trouver une matrice triangulaire supérieure inversible à coefficients diagonaux positifs  $T$ , vérifiant  $A = {}^t T T$  (décomposition de Choleski).

On ne demande pas de prouver ce résultat.

- (a) On se propose de démontrer que cette matrice  $T$  est unique.

Si on pose  $A = {}^t T_1 T_1 = {}^t T_2 T_2$ , démontrer que  $T_1 T_2^{-1} = I_n$  et conclure.

On pourra admettre que si  $\mathcal{T}$  est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures inversibles de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $(\mathcal{T}, \cdot)$  est un groupe.

- (b) Exemple : si  $A = (a_{ij})$ , où pour tout couple  $(i, j)$  d'entiers compris entre 1 et  $n$ ,  $a_{ij} = \min(i, j)$ , donner la décomposition de Choleski de la matrice  $A$ .

On ne demande pas de vérifier que  $A$  est une matrice de  $S_n^{++}$ .

9. *Un peu d'informatique*

Pour une matrice  $A$  de  $S_3^{++}$ , écrire un algorithme en français permettant de trouver la matrice  $T$  de la décomposition de Choleski.

Entrer cet algorithme dans la calculatrice (on ne demande pas le programme sur la copie) puis, pour chacun des cas suivants, donner la matrice  $T$  :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 49 & 14 & -14 \\ 14 & 20 & -8 \\ -14 & -8 & 21 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 20 & 26 \\ 3 & 26 & 70 \end{pmatrix}.$$

10. *Inégalité d'Hadamard*

- (a) Soit  $S = (s_{ij}) \in S_n^{++}$ , démontrer que  $\det S \leq \prod_{i=1}^n s_{ii}$ .

- (b) Application : démontrer que pour toute matrice inversible  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $M = (a_{ij})$ ,

$$|\det M| \leq \left( \prod_{i=1}^n \left( \sum_{k=1}^n a_{ki}^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

**Fin de l'énoncé**