Épreuve : MATHÉMATIQUES I — Filière MP

- version du 1er mars 2010 9h35

Les calculatrices sont autorisées

Dans tout le problème l'ensemble $\mathbf{C}$ des nombres complexes est considéré comme le plan affine euclidien muni de son repère orthonormé canonique $(0, 1, \mathrm{i})$ (où $\mathrm{i}^2 = -1$).

- On notera K l'ensemble des triplets (α, β, γ) de $\mathbf{R}^3$ constitués de trois réels positifs ou nuls tels que $\alpha + \beta + \gamma = 1$.
- Si $(a, b, c) \in \mathbf{C}^3$, on notera $\widehat{abc}$ le "triangle plein" défini par :
  $\widehat{abc} = \{\alpha\, a + \beta\, b + \gamma\, c \;/\; (\alpha, \beta, \gamma) \in K\}$.

  Dans tout le problème on notera τ_0, τ_1 et τ les triangles pleins définis par :
  $\tau_0 = \widehat{-10\mathrm{i}}$.
  $\tau_1 = \widehat{01\mathrm{i}}$.
  $\tau = \widehat{-11\mathrm{i}}$.
- On notera également ϕ_0 et ϕ_1 les applications de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$ définies par (en notant $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z) :
  $\phi_0(z) = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2}\,\overline{z} + \dfrac{-1+\mathrm{i}}{2}$ et $\phi_1(z) = \dfrac{1-\mathrm{i}}{2}\,\overline{z} + \dfrac{1+\mathrm{i}}{2}$.
- La notation $\{0, 1\}^{\mathbf{N}^*}$ désignera l'ensemble des suites $(r_n)_{n\geq 1}$ d'entiers naturels tels que $r_n \in \{0, 1\}$ pour tout entier naturel non nul n.
- La norme de la convergence uniforme sur le $\mathbf{C}$-espace vectoriel des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbf{C}$ est notée $\|\ \|_\infty$.
- La partie entière du réel x est notée $[x]$. Si n est un entier naturel on posera, pour tout réel x et tout entier naturel non nul n :
  $r_n(x) = [2^n\, x] - 2\,[2^{n-1}\, x]$.
- On notera $\mathbf{Z}\left[\dfrac{1}{2}\right]$ l'ensemble des rationnels de la forme $\dfrac{k}{2^n}$ où $k \in \mathbf{Z}$ et $n \in \mathbf{N}$.
- On rappelle enfin que, si $(X_n)_{n\geq 1}$ est une famille de parties de $\mathbf{C}$ indexées sur $\mathbf{N}^*$, on a :
  $\displaystyle\bigcap_{n\geq 1} X_n = \{z \in \mathbf{C} \;/\; \forall n \in \mathbf{N}^*,\ z \in X_n\}$

L'objectif du problème est la construction d'une application f continue de $[0, 1]$ dans $\mathbf{C}$ dont l'image $f([0, 1])$ est le triangle plein τ et l'étude de quelques unes de ses propriétés.

Partie I - Préliminaires géométriques

I.A -

I.A.1) Établir que $\tau = \tau_0 \cup \tau_1$.

I.A.2) Représenter sur une même figure τ_0, τ_1, τ.

I.A.3)

a) Soit $a \in \mathbf{C}$ et $\theta \in \mathbf{R}$. Prouver que l'image z' du complexe z par la réflexion dont l'axe est la droite passant par a et dirigée par $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ vérifie la relation :

$$z' - a = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}\,\overline{(z - a)}$$

b) Établir une relation analogue à celle de la question précédente entre un complexe z et son image z' par l'homothétie de centre a et de rapport $\rho > 0$.

c) Démontrer que ϕ_0 est la composée d'une réflexion dont on précisera l'axe et d'une homothétie de rapport strictement positif à préciser et dont le centre appartient à l'axe de la réflexion. Prouver une propriété analogue pour ϕ_1. Ces décompositions sont-elles uniques ?

I.A.4) Que vaut l'image d'un triangle plein $\widehat{abc}$ par ϕ_0 et par ϕ_1 ? Déterminer $\phi_0(\tau)$ et $\phi_1(\tau)$.

I.B - (Diamètre d'un triangle plein)

I.B.1)

a) Démontrer que K est un compact de $\mathbf{R}^3$ pour sa topologie usuelle.

b) Démontrer que K est convexe c'est à dire que, pour tout réel $t \in [0, 1]$ et tout couple (u, v) d'éléments de K, $tu + (1 - t)v$ appartient à K.

c) Établir que, si $(a, b, c) \in \mathbf{C}^3$, $\widehat{abc}$ est un compact convexe de $\mathbf{C}$ muni de sa topologie usuelle.

d) Avec les mêmes notations prouver l'existence de :

$$\delta(\widehat{abc}) = \max\{|z' - z| \;/\; (z, z') \in \widehat{abc}^{\,2}\}$$

I.B.2)

a) Démontrer que, si l'on fixe $z \in \mathbf{C}$ et $(a, b, c) \in \mathbf{C}^3$

$$\max\{|z' - z| \;/\; z' \in \widehat{abc}\} = \max(|z - a|, |z - b|, |z - c|).$$

b) En déduire une expression simple de $\delta(\widehat{abc})$.

I.B.3) Soit $(r_n)_{n\geq 1}$ un élément de $\{0,1\}^{\mathbf{N}^*}$. Pour chaque entier naturel non nul n, on note $\tilde{\tau}_n = \phi_{r_1} \circ \phi_{r_2} \circ \cdots \circ \phi_{r_n}(\tau)$.
Montrer que $\bigcap_{n\geq 1} \tilde{\tau}_n$ est réduit à un seul point appartenant à τ.

Partie II - Construction de l'application f

II - Dans la suite on note $\mathcal{E}$ l'ensemble des applications g continues de $[0,1]$ dans $\mathbf{C}$ telles que $g(0) = -1$ et $g(1) = 1$. Si $g \in \mathcal{E}$, on note Tg l'application de $[0,1]$ dans $\mathbf{C}$ définie par :

$$Tg(x) = \phi_0(g(2x)) \text{ si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \text{ et } Tg(x) = \phi_1(g(2x-1)) \text{ si } x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right].$$

II.1) Déterminer l'unique élément f_0 de $\mathcal{E}$ qui soit affine.

II.2) Montrer que $Tg \in \mathcal{E}$ pour tout $g \in \mathcal{E}$.

II.3) Soient g_1 et g_2 deux éléments de $\mathcal{E}$. Prouver que :

$$||Tg_2 - Tg_1||_\infty = \frac{1}{\sqrt{2}}||g_2 - g_1||_\infty \ .$$

II.4) On définit maintenant une suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathcal{E}$ en choisissant f_0 affine comme ci-dessus et $f_{n+1} = Tf_n$ pour tout entier naturel n.

a) Prouver que la suite (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction $f \in \mathcal{E}$.

b) Prouver que $Tf = f$.

c) Prouver que, pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = -\overline{f(1-x)}$ et interpréter géométriquement cette relation.

Partie III - Propriétés de f

III.A - Image de f

III.A.1) Soit $(r_n)_{n\geq 1} \in \{0,1\}^{\mathbf{N}^*}$

a) Montrer que la série de terme général $\dfrac{r_n}{2^n}$ converge et que sa somme x appartient à $[0,1]$.

b) En posant pour tout entier naturel p, $x_p = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{r_{n+p}}{2^n}$, prouver la relation :

$$f(x) = \phi_{r_1} \circ \phi_{r_2} \circ \ldots \phi_{r_p}(f(x_p))$$

pour tout entier naturel non nul p.

III.A.2) Inversement, soit $x \in [0,1[$.

a) Établir que, pour tout entier naturel non nul n, $r_n(x) \in \{0,1\}$.

b) Montrer que, pour tout entier naturel non nul N et tout réel $x \in [0,1[$:

$$\frac{[2^N x]}{2^N} = \sum_{n=1}^{N} \frac{r_n(x)}{2^n} \quad \text{puis} \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n(x)}{2^n}.$$

c) Montrer que si, en outre, $x \in \mathbf{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$ alors il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que $r_n(x) = 0$ pour tout entier naturel $n > N$.

d) Calculer $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et $f\left(\dfrac{1}{4}\right)$. Reconnaître $\phi_0 \circ \phi_0$ et en déduire $f\left(\dfrac{1}{2^k}\right)$ pour tout $k \in \mathbf{N}$.

III.A.3)

a) Montrer que $f\left([0,1] \cap \mathbf{Z}\left[\frac{1}{2}\right]\right) \subset \tau$.

b) Montrer que $f([0,1]) \subset \tau$.

III.A.4) Inversement, soit $z \in \tau$.

a) Montrer qu'on peut définir deux suites $(z_n)_{n\geq 0}$ et $(r_n)_{n\geq 1}$ de la manière suivante :

- $z_0 = z$ et, si $n \geq 1$:
- si $z_{n-1} \in \tau_0$ alors $r_n = 0$ et $z_n = (\phi_0)^{-1}(z_{n-1})$
- sinon $r_n = 1$ et $z_n = (\phi_1)^{-1}(z_{n-1})$.

Prouver que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, z_n appartient τ.

b) Prouver que $f\left(\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{r_n}{2^n}\right) = z$ (on pourra exprimer z en fonction de z_n et des ϕ_{r_i}).

c) Ecrire une fonction qui prend en argument un complexe z (que l'on supposera dans τ) et un réel ϵ et qui renvoie une valeur approchée à ϵ près d'un antécédent de z.

III.A.5)

a) Prouver que f n'est pas injective (on pourra utiliser la relation $f(1-x) = -\overline{f(x)}$).

b) Plus généralement montrer qu'il n'existe aucune bijection continue de $[0,1]$ sur τ (on pourra utiliser un argument de connexité par arcs).

III.A.6)

a) Pour $(i,j) \in \{0,1\}^2$, déterminer l'expression complexe de $\phi_i \circ \phi_j$, la reconnaître, préciser son point fixe et l'image de τ. Faire un dessin.

b) Soient $r_1, r_2, \ldots, r_p$ des éléments de $\{0,1\}$. Prouver que $\phi = \phi_{r_1} \circ \phi_{r_2} \circ \cdots \circ \phi_{r_p}$ possède un unique point fixe que l'on ne cherchera pas nécessairement à exprimer simplement.

c) Exhiber, à l'aide de l'application f, un point fixe de ϕ.

d) Montrer que l'ensemble X des complexes z qui sont point fixe de la composée d'un nombre fini d'applications ϕ_0 et ϕ_1 est dense dans τ.

III.B - Dérivabilité de f

III.B.1) Supposons que f soit dérivable sur $[0,1]$.
Soient $x \in [0,1]$, $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ et $(\beta_n)_{n\geq 1}$ deux suites d'élements de $[0,1]$, convergentes vers x et telles que $\alpha_n \leq x \leq \beta_n$ et $\alpha_n < \beta_n$ pour tout n.
Montrer que la suite de terme général $\dfrac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}$ converge vers $f'(x)$.

III.B.2) Soit $x \in [0,1]$

a) Si $x \in [0,1[$, en choisissant :

$$\alpha_n = \frac{r_1(x)}{2} + \cdots + \frac{r_n(x)}{2^n} \text{ et } \beta_n = \alpha_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k},$$

prouver que f n'est pas dérivable en x.

b) Prouver que f n'est pas dérivable en 1.

••• FIN •••