CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE MP

MATHEMATIQUES 2

Durée : 4 heures

Les calculatrices ***sont autorisées****.*

* * *

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

* * *

QUELQUES UTILISATIONS DES PROJECTEURS

Notations et objectifs :

Dans tout le texte E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. On note id l'endomorphisme identité de E, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices réelles carrées de taille n.

Si E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels de E supplémentaires, c'est-à-dire $E = E_1 \oplus E_2$, on appelle projecteur sur E_1 parallèlement à E_2 l'endomorphisme p de E qui, à un vecteur x de E se décomposant comme $x = x_1 + x_2$, avec $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$, associe le vecteur x_1.

On rappelle que si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice exponentielle de A est la matrice :

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

De même si u est un endomorphisme de E, l'exponentielle de u est l'endomorphisme :

$$\exp(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^k}{k!}.$$

Dans les parties II. et III., on propose une méthode de calcul d'exponentielle de matrice à l'aide de projecteurs spectraux dans les cas diagonalisable et non diagonalisable. Dans la dernière partie IV., on utilise les projections orthogonales pour calculer des distances à des parties.

Les quatre parties sont indépendantes.

I. Questions préliminaires

1. Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   Calculer $\exp(A)$, $\exp(B)$, $\exp(A)\exp(B)$ et $\exp(A+B)$ (pour $\exp(A+B)$, on donnera la réponse en utilisant les fonctions ch et sh).
2. Rappeler sans démontration, une condition suffisante pour que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifient l'égalité $\exp(A)\exp(B) = \exp(A+B)$.

II. Un calcul d'exponentielle de matrice à l'aide des projecteurs spectraux, cas diagonalisable

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable dont les valeurs propres sont :

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_r,$$

où r désigne un entier vérifiant $1 \leqslant r \leqslant n$.

3. *Polynôme interpolateur de Lagrange* : on note $\mathbb{R}_{r-1}[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $r-1$.
   On considère l'application linéaire ϕ de $\mathbb{R}_{r-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^r$ définie par :
   $$P \mapsto (P(\lambda_1), P(\lambda_2), \ldots, P(\lambda_r)).$$
   Déterminer le noyau de ϕ, puis en déduire qu'il existe un unique polynôme L de $\mathbb{R}_{r-1}[X]$ tel que pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, $L(\lambda_i) = \mathrm{e}^{\lambda_i}$.
4. Pour $i \in \{1, \ldots, r\}$, on définit le polynôme l_i de $\mathbb{R}_{r-1}[X]$ par :
   $$l_i(X) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{r} \frac{X - \lambda_k}{\lambda_i - \lambda_k}.$$
   (a) Calculer $l_i(\lambda_j)$ selon les valeurs de i et j dans $\{1, \ldots, r\}$.
   (b) En déduire une expression du polynôme L comme une combinaison linéaire des polynômes l_i avec $i \in \{1, \ldots, r\}$.
5. *Une propriété de l'exponentielle* : soit P une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et D une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Justifier que l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $M \mapsto PMP^{-1}$ est une application continue.
   (b) En déduire que :
   $$\exp(PDP^{-1}) = P\exp(D)P^{-1}.$$

6. Déduire des questions **3.** et **5.** que $\exp(A) = L(A)$.
7. On suppose que E est munie d'une base $\mathcal{B}$ et on désigne par v l'endomorphisme de E dont la matrice par rapport à $\mathcal{B}$ est A. Soit λ une valeur propre de v, et x un vecteur propre associé. Démontrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on a :
$$P(v)(x) = P(\lambda)x.$$
8. Soit $i \in \{1, \ldots, r\}$, on note $E_i = \mathrm{Ker}(v - \lambda_i \,\mathrm{id})$ le sous-espace propre de v associé à λ_i.
   (a) Démontrer que l'endomorphisme de E, $p_i = l_i(v)$ est le projecteur sur E_i, parallèlement à $\bigoplus\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{r} E_k$ (on dit que les p_i sont les projecteurs spectraux de v).
   (b) En déduire une expression de $\exp(A)$ comme une combinaison linéaire de matrices de projecteurs.

III. Un calcul d'exponentielle de matrice à l'aide des projecteurs spectraux, cas non diagonalisable

Soit u un endomorphisme de E dont le polynôme minimal est $(X-1)^2(X-2)$.

9. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ? Justifier la réponse.
10. Écrire, sans justifier, un exemple de matrice triangulaire de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont l'endomorphisme canoniquement associé a pour polynôme minimal $(X-1)^2(X-2)$.
11. Démontrer, sans aucun calcul, que $E = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})^2 \oplus \mathrm{Ker}(u - 2\,\mathrm{id})$.
12. On considère les endomorphismes de E : $p = (u - \mathrm{id})^2$ et $q = u \circ (2\,\mathrm{id} - u)$. Calculer $p + q$.
13. Démontrer que l'endomorphisme p est le projecteur sur $\mathrm{Ker}(u - 2\,\mathrm{id})$, parallèlement à $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})^2$. Que dire de l'endomorphisme q ?
14. Soit x un élément de E.
   (a) Préciser $(u - 2\,\mathrm{id})\,(p(x))$.
   (b) Déterminer un nombre réel α tel que pour tout entier naturel k, $u^k \circ p = \alpha^k p$.
   (c) En déduire que $\exp(u) \circ p = \beta p$ où β est un réel à déterminer.
15. Que vaut pour tout entier $k \geqslant 2$, $(u - \mathrm{id})^k \circ q$?
   Démontrer que $\exp(u) \circ q = \gamma u \circ q$ où γ est un réel à déterminer (on pourra écrire en justifiant que $\exp(u) = \exp(\mathrm{id}) \circ \exp(u - \mathrm{id})$).
16. Écrire enfin l'endomorphisme $\exp(u)$ comme un polynôme en u.

IV. Calcul de distances à l'aide de projecteurs orthogonaux

Dans cette partie, on suppose en plus que l'espace E est muni d'un produit scalaire $< \cdot, \cdot >$, ce qui lui confère une structure d'espace euclidien. On rappelle que la norme euclidienne associée, notée $\| \cdot \|$, est définie par :
$$\forall x \in E, \quad \|x\| = \sqrt{< x, x >}.$$

Si F est un sous-espace vectoriel de E, on note $F^\perp$ son orthogonal, et on appelle projecteur orthogonal sur F, noté p_F le projecteur sur F, parallèlement à $F^\perp$.

Enfin, si x est un vecteur de E, la distance euclidienne de x à F, notée $\mathrm{d}(x, F)$ est le réel :
$$\mathrm{d}(x, F) = \inf\{\|x - y\| \quad | \quad y \in F\}.$$

17. *Théorème de la projection orthogonale* : soit F un sous-espace vectoriel de E et x un vecteur de E. Rappeler sans démonstration, la formule permettant de calculer $\mathrm{d}(x, F)$ à l'aide du vecteur $p_F(x)$.
18. *Cas des hyperplans* : soit n un vecteur non nul de E et H l'hyperplan de E orthogonal à n, c'est à dire $H = (\mathrm{Vect}\,\{n\})^{\perp}$. Exprimer pour $x \in E$, la distance $\mathrm{d}(x, H)$ en fonction de $< x, n >$ et de $\|n\|$.
19. *Une application* : dans cette question uniquement, $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique : si A et B sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, en notant Tr la trace,

$$< A, B > = \mathrm{Tr}({}^tAB).$$

Enfin on note H l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont la trace est nulle.

(a) Justifier que H est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer $H^{\perp}$.

(b) Si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, déterminer la distance $\mathrm{d}(M, H)$.

20. *Et pour une norme non euclidienne ?* Dans cette question $E = \mathbb{R}^2$ est muni de la norme infinie notée N_∞ : si $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad N_\infty(x) = \max\{|x_1|, |x_2|\}$. On pose $F = \mathrm{Vect}\,\{(1, 0)\}$ et $x = (1, 1)$. Déterminer la distance «infinie» du vecteur x à F, c'est-à-dire le réel :

$$\mathrm{d}_\infty(x, F) = \inf\{N_\infty(x - y) \quad | \quad y \in F\},$$

et préciser l'ensemble des vecteurs m pour lesquels cette distance est atteinte, c'est-à-dire $\mathrm{d}_\infty(x, F) = N_\infty(x - m)$. Commenter.

Fin de l'énoncé