CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PSI

MATHEMATIQUES 2

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont autorisées.

****

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

****

Le sujet comporte 5 pages.

Notations

On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, par $\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres entiers naturels et par $\mathbb{N}^*$ l'ensemble $\mathbb{N}$ privé de 0.

Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on note $[\![1,n]\!]$ l'ensemble des entiers k tels que $1 \leq k \leq n$.

Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on note $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées à n lignes et à coefficients dans $\mathbb{R}$. Etant donné une matrice A de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\det(A)$ le déterminant de la matrice A. La notation $A = (a_{i,j})$ signifie que $a_{i,j}$ est le coefficient de la ligne i et de la colonne j de la matrice A. On note I_n la matrice diagonale de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1.

Objectifs

On considère des endomorphismes autoadjoints dont la matrice, relativement à une base orthonormale, est à coefficients tous positifs ou nuls. Avec une hypothèse supplémentaire sur les coefficients de la matrice, on fait établir des propriétés sur les valeurs propres et sur les vecteurs propres de ces endomorphismes.

La première partie est calculatoire et conduit à traiter un exemple des résultats généraux du problème.

Dans la deuxième partie, on fait établir des propriétés des endomorphismes autoadjoints particuliers que l'on étudie. La question II.1 porte sur l'étude de la norme subordonnée d'applications linéaires ; les questions suivantes de la partie II sont indépendantes des résultats de la question II.1.

Les deux parties sont indépendantes.

Dans tout le problème on désigne par n un entier de $\mathbb{N}^*$.

Les résultats servant à résoudre une question et provenant d'une question précédente, devront être justifiés par un renvoi à la question dont ils sont déduits.

PARTIE I

I.1. Soit θ un réel. On considère la suite réelle $(x_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$x_1 = \sin(\theta)$,

$-2x_1\cos(\theta) + x_2 = 0$,

et pour tout $p \geq 1$, $x_p - 2x_{p+1}\cos(\theta) + x_{p+2} = 0$.

I.1.1. Déterminer x_2. Pour tout p dans $\mathbb{N}^*$ expliciter x_p en fonction de p et de θ.

I.1.2. Soit n dans $\mathbb{N}^*$, à quelle condition sur θ a-t-on $x_{n+1} = 0$?

Pour t réel, on note $A_n(t) = (a_{i,j})$ la matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :
(1) pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ les coefficients de la diagonale sont $a_{i,i} = 2t$;
(2) pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!]$ tel que $|i-j| = 1$, $a_{i,j} = 1$;
(3) dans tous les autres cas $a_{i,j} = 0$.
On note $d_n(t) = \det(A_n(t))$.

I.2. Quelques valeurs de $d_n(t)$.

I.2.1. Calculer $d_1(t)$, $d_2(t)$, $d_3(t)$, $d_4(t)$.

I.2.2. Pour $n \geq 3$, établir une relation entre $d_n(t)$, $d_{n-1}(t)$ et $d_{n-2}(t)$. En déduire que d_n est un polynôme en *t*, déterminer son degré ainsi que le coefficient du terme de plus haut degré.

I.3. On suppose $|t| < 1$ et on note $t = \cos(\theta)$ avec $0 < \theta < \pi$.

I.3.1. Montrer que $d_n(\cos(\theta)) = \dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$.

I.3.2. Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles $d_n(\cos(\theta)) = 0$.

I.4. On note $\chi_n(\lambda) = \det(A_n(0) - \lambda I_n)$ le polynôme caractéristique de la matrice $A_n(0)$.

I.4.1. Exprimer $\chi_n(\lambda)$ en fonction de d_n et de λ.

I.4.2. Déduire de I.3.2. que la matrice $A_n(0)$ possède n valeurs propres distinctes et donner ces valeurs propres. Montrer que la plus grande valeur propre est $\rho = 2\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$.

I.4.3. En utilisant I.1.2, déterminer un vecteur propre de la matrice $A_n(0)$ associé à la valeur propre $\rho = 2\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$, dont toutes les composantes sont strictement positives.

PARTIE II

On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ rapporté à une base orthonormale $\mathfrak{B} = (e_1, ..., e_n)$. Étant donné deux vecteurs u et v de $\mathbb{R}^n$, on note $(u|v)$ leur produit scalaire et $\|u\|$ la norme du vecteur u. Pour tout sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$, on note $F^\perp$ l'orthogonal de F ; on admettra la propriété $\left(F^\perp\right)^\perp = F$.
On note $S = \left\{u \in \mathbb{R}^n / \|u\| = 1\right\}$. Pour tout endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$, on note $\mathrm{Sp}(f)$ l'ensemble des valeurs propres, réelles ou complexes, de f, c'est-à-dire le spectre de f.

II.1. Pour tout endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$, on note $||| f ||| = \sup\limits_{\|u\| \leq 1} \|f(u)\|$ la norme subordonnée à la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$ de l'endomorphisme f.

II.1.1. Soit φ un automorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^n$. Calculer $||| \varphi |||$.

II.1.2. Soit δ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ représenté dans la base $\mathfrak{B}$ par la matrice diagonale $\mathrm{diag}(\alpha_1, ..., \alpha_n)$, dont les coefficients de la diagonale sont les α_i. Montrer que $||| \delta ||| = \max\limits_{i \in [\![1,n]\!]} |\alpha_i|$.

II.1.3. En déduire que lorsque f est un endomorphisme autoadjoint de $\mathbb{R}^n$ on a $||| f ||| = \max\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} |\lambda|$.

Les questions suivantes de la partie II sont indépendantes de la question II.1.

Dans la suite du problème, on note l un endomorphisme autoadjoint de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$.

II.2. Propriété de la plus grande valeur propre de l. On note Φ l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par : pour tout vecteur u de $\mathbb{R}^n$, $\Phi(u) = (l(u)|u)$.

II.2.1. Montrer que Φ est une application continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. En déduire que la restriction de l'application Φ à l'ensemble S admet un maximum.

On note v un vecteur de S tel que $\Phi(v) = \max\limits_{u \in S} \Phi(u)$. Dans la suite de la question II.2, le vecteur v est fixé.

II.2.2. Soit u un vecteur de S orthogonal à v et soit t un réel.
Déterminer un scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $w = \dfrac{v + tu}{\alpha}$ appartienne à S.
En comparant $\Phi(v)$ et $\Phi(w)$, montrer que $(l(v)|u) = 0$.
En déduire que le vecteur v est un vecteur propre de l.

On note ρ la valeur propre de l associée au vecteur propre v.

II.2.3. Soit λ une valeur propre quelconque de l et soit x un vecteur de S qui est un vecteur propre de l pour la valeur propre λ.
Comparer $\Phi(x)$ et λ.
Déduire des résultats précédents que $\lambda \le \rho$.

On a donc montré que $\rho = \max\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(l)} \lambda = \max\limits_{u \in S} \Phi(u)$ et que si un vecteur v de S vérifie $\Phi(v) = \max\limits_{u \in S} \Phi(u)$, alors $l(v) = \rho v$.

Dans la suite du problème, on suppose que la matrice $A = (a_{i,j})$ de l'endomorphisme autoadjoint l, relativement à la base orthonormale $\mathfrak{B}$, vérifie les deux conditions suivantes :
(1) pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, n]\!]$, on a $a_{i,j} \ge 0$;
(2) il n'existe pas de partition de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ vérifiant $[\![1, n]\!] = I \cup J$, $I \cap J = \phi$ avec I et J non vides et telle que pour tout $(i, j) \in I \times J$, on ait $a_{i,j} = 0$.

Étant donné un vecteur $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$, on écrit $x \ge 0$ (respectivement $x > 0$) si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $x_i \ge 0$ (respectivement $x_i > 0$). On note x^+ le vecteur $x^+ = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i| e_i$.

Dans la suite du problème, on note $\rho = \max\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(l)} \lambda$.

II.3. Signe de ρ.

II.3.1. Soit $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Exprimer $\Phi(x)$ en fonction des scalaires $a_{i,j}$ et x_i. En déduire l'inégalité $|\Phi(x)| \le \Phi(x^+)$.

II.3.2. Soit $x=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ un vecteur de S tel que $\rho=\Phi(x)$. Montrer que $\rho=\Phi(x^+)$. En déduire que $\rho \geq 0$.

II.4. Soit λ une valeur propre quelconque de l et soit x un vecteur de S tel que $l(x)=\lambda x$. Montrer que $|\lambda| \leq \rho$.

On a donc $\rho=\max\limits_{\lambda\in \mathrm{Sp}(l)}|\lambda|$.

II.5. Soit x un vecteur de S tel que $l(x)=\rho x$. Montrer que $l(x^+)=\rho x^+$, puis montrer que $x^+>0$ (pour montrer que $x^+>0$, on pourra raisonner par l'absurde et se souvenir que la matrice A de l'endomorphisme l vérifie la condition (2)).

II.6. Soient $x=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y=\sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ deux vecteurs non nuls tels que $l(x)=\rho x$ et $l(y)=\rho y$. Justifier que $y_1 \neq 0$. En considérant le vecteur $z=x-\frac{x_1}{y_1}y$, montrer que le sous-espace propre de l associé à la valeur propre ρ est de dimension 1.

II.7. Soit x un vecteur propre de l associé à une valeur propre λ. On suppose $x>0$. Montrer que $\lambda \geq 0$. Montrer que $\lambda=\rho$.

II.8. On suppose $n\geq 3$. Soit $A=(a_{i,j})\in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice telle que

(1) $a_{1,n}=a_{n,1}=1$;

(2) pour tout $(i,j)\in [\![1,n]\!]\times[\![1,n]\!]$ tel que $|i-j|=1$, $a_{i,j}=1$;

(3) dans tous les autres cas $a_{i,j}=0$.

Déduire des questions précédentes la plus grande valeur propre de la matrice A.

Fin de l'énoncé.