EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PC

MATHEMATIQUES 1

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont interdites

****

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

****

Notations et objectifs

n est un entier naturel supérieur ou égal à 1. On note $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices colonnes à n lignes à coefficients réels, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre n, $GL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. I_n désigne la matrice identité d'ordre n et pour toute matrice A, ${}^tA$ désigne la transposée de A.

Selon le contexte, 0 désigne soit le réel nul, soit la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit encore la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On rappelle que pour toute matrice symétrique réelle d'ordre n, il existe P appartenant à $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale réelle d'ordre n telles que $S = PDP^{-1}$.

$\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique noté $(\cdot \mid \cdot)$ et de la norme associée notée $||\cdot||$.

Une matrice S de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est dite positive si :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \, , \; {}^tXSX \geqslant 0$$

et définie positive si :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} \, , \; {}^tXSX > 0$$

On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ positives et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ définies positives.

Soit A une application d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui à t associe la matrice $A(t)$ de coefficient d'indices i, j, $a_{ij}(t)$. Si pour tout (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$, l'application $t \longmapsto a_{ij}(t)$ est intégrable sur I, on note $\displaystyle\int_I A(t)dt$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficient d'indices i, j, $\displaystyle\int_I a_{ij}(t)dt$.

L'objectif de ce problème est d'étudier la notion de fonction matriciellement croissante.

Dans la première partie on étudiera les notions de matrices symétriques réelles positives et définies positives, puis on définira sur l'ensemble des matrices symétriques réelles une relation d'ordre. Diverses propriétés de cette relation seront utilisées dans les deux parties suivantes.

Dans la seconde partie, on définira ce qu'est une fonction matriciellement croissante (ou décroissante) et on étudiera des exemples de fonctions homographiques et puissances.

La troisième et dernière partie fera appel à une représentation intégrale et permettra de montrer que la fonction logarithme népérien et la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ pour $\alpha \in]0,1[$ sont matriciellement croissantes.

Dans tout le problème, S **désigne une matrice symétrique réelle d'ordre** n.

PARTIE I

I.1 Montrer que si S appartient à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, alors pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ${}^tMSM$ appartient aussi à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

I.2 Montrer que S appartient à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives (respectivement strictement positives).

I.3 Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est symétrique positive. Est-elle symétrique définie positive ?

I.4 Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Est-elle symétrique définie positive ?

I.5 Montrer que si S appartient à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et si T est une matrice symétrique réelle semblable à S, alors T appartient aussi à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

I.6 **a)** Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer que si λ est valeur propre de M, alors λ est non nul et λ^{-1} est valeur propre de M^{-1}. En déduire le spectre de M^{-1} en fonction du spectre de M.

b) Montrer que si S appartient à $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors S est inversible et S^{-1} appartient à $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

I.7 Montrer que si pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXSX = 0$, alors toute valeur propre de S est nulle et $S = 0$.

I.8 On munit $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des relations notées $\leqslant$ et $<$, définies respectivement par :

$$\forall\,(S_1, S_2) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2 \;,\; (S_1 \leqslant S_2 \Longleftrightarrow S_2 - S_1 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}))$$

et

$$\forall\,(S_1, S_2) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2 \;,\; (S_1 < S_2 \Longleftrightarrow S_2 - S_1 \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}))$$

a) Si S_1 et S_2 sont deux matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $S_1 \leqslant S_2$ et $S_2 \leqslant S_1$, montrer que $S_1 = S_2$.

b) Si $(S_1, S_2) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2$, montrer que l'on n'a pas nécessairement $S_1 \leqslant S_2$ ou $S_2 \leqslant S_1$.

c) Si S_1 et S_2 sont deux matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $S_1 \leqslant S_2$, $S_1 \neq S_2$, a-t-on $S_1 < S_2$?

d) Si S_1 et S_2 sont deux matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $S_1 \leqslant S_2$ et α un réel, comparer les matrices αS_1 et αS_2 pour la relation $\leqslant$.

e) Si S, S_1 et S_2 sont trois matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $S_1 \leqslant S_2$, comparer les matrices $S + S_1$ et $S + S_2$ pour la relation $\leqslant$.

I.9 Soit $(S_1, S_2) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2$ avec $S_1 \leqslant S_2$. Montrer que pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ${}^tMS_1M \leqslant {}^tMS_2M$.

I.10 On suppose $I_n \leqslant S$.

a) Que peut-on dire des valeurs propres de S ? En déduire que S est inversible.

b) Que peut-on dire des valeurs propres de S^{-1} ? En déduire : $0 < S^{-1} \leqslant I_n$.

I.11 a) Montrer que s'il existe $M \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tMM$, alors S est symétrique définie positive.

b) Montrer que si S est diagonale définie positive, alors il existe $M \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tMM$.

c) Montrer que ce résultat subsiste si S est symétrique définie positive non diagonale.

I.12 Soit $(S_1, S_2) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2$ tel que $0 < S_1 \leqslant S_2$ et $M_1 \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $S_1 = {}^tM_1M_1$. Montrer que $I_n \leqslant {}^t(M_1^{-1})S_2M_1^{-1}$, en déduire que S_2 est inversible et $S_2^{-1} \leqslant S_1^{-1}$.

PARTIE II

II.1 Dans cette question seulement, on suppose d'une part que n est supérieur ou égal à 2 et d'autre part que S possède exactement deux valeurs propres λ_1 et λ_2 de multiplicités respectives n_1 et n_2.

a) Montrer qu'il existe un unique couple (P_1, P_2) de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que :

$$\begin{cases} I_n = P_1 + P_2 \\ S = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 \end{cases}$$

Expliciter les deux matrices P_1, P_2 en fonction de S, I_n, λ_1, λ_2 et montrer qu'elles sont symétriques.

b) Si P est une matrice orthogonale telle que $P^{-1}SP = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_2)$ (où λ_1 est répété n_1 fois et λ_2 n_2 fois), exprimer P_1 (respectivement P_2) en fonction de P, de P^{-1} et d'une matrice diagonale. En déduire que $P_1^2 = P_1$, $P_2^2 = P_2$, $P_1P_2 = P_2P_1 = 0$ et donner les rangs de P_1 et P_2 en fonction de n_1 et n_2.

c) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $S^k = \lambda_1^k P_1 + \lambda_2^k P_2$ et en déduire pour $Q \in \mathbb{R}[X]$ l'expression de $Q(S)$ en fonction de P_1, P_2, $Q(\lambda_1)$ et $Q(\lambda_2)$.

d) Soit S_0 la matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1 sauf les coefficients diagonaux qui valent 2. Vérifier que S_0 admet exactement deux valeurs propres et déterminer les matrices P_1 et P_2 associées.

II.2 Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont S est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On note λ_1, λ_2, $\dots$, λ_p les valeurs propres distinctes de u et $E_1, E_2, \dots, E_p$ les sous-espaces propres de u respectivement associés.

a) Montrer que : $\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $(u(x) \mid y) = (x \mid u(y))$.

b) Montrer que pour tout $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$ tel que $i \neq j$, les sous-espaces propres E_i et E_j sont orthogonaux. Que vaut la somme directe $\overset{p}{\underset{i=1}{\oplus}} E_i$?

c) Si $i \in [\![1, p]\!]$ et $x \in \mathbb{R}^n$, on note $p_i(x)$ la projection orthogonale de x sur E_i. La matrice de p_i dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est notée P_i.

i) Montrer que la matrice P_i est symétrique.

ii) Si x_j est élément de E_j, évaluer $p_i(x_j)$ et en déduire que pour tout $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$ tel que $i \neq j$, $P_iP_j = 0$.

d) Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} P_i = I_n$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i P_i = S$.

La décomposition $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i P_i$ est dite décomposition spectrale de S.

II.3 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans $\mathbb{R}$. Si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ sont dans I, on définit la matrice $f(S)$ par

$$f(S) = \sum_{i=1}^{p} f(\lambda_i) P_i$$

a) Montrer que $Sf(S) = f(S)S = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(\lambda_i) P_i$.

b) Si X est vecteur propre de S pour la valeur propre λ_k, montrer que X est aussi vecteur propre de $f(S)$ et préciser la valeur propre correspondante.

c) Calculer $\cos(\pi S_0)$ où S_0 est la matrice introduite en **II.1 d)**.

L'application f sera dite matriciellement croissante (respectivement matriciellement décroissante) sur I si pour tout $n \geqslant 1$ et tout couple (A, B) de matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont dans I :

$$A \leqslant B \Longrightarrow f(A) \leqslant f(B) \ \ \text{(respectivement } f(B) \leqslant f(A))$$

II.4 a) Soit $g\ :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ x \longmapsto \dfrac{1}{x}$. A quelle condition sur la matrice S peut-on définir $g(S)$? Montrer qu'alors $g(S) = S^{-1}$ et en déduire que g est matriciellement décroissante sur $]0, +\infty[$.

b) Soit $h\ :]-1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ x \longmapsto \dfrac{x}{x+1}$. A quelle condition sur la matrice S peut-on définir $h(S)$? Montrer qu'alors $h(S) = I_n - (S + I_n)^{-1}$ et en déduire que h est matriciellement croissante sur $]-1, +\infty[$.

II.5 Pour $\alpha > 0$, soit $p_\alpha\ :\ [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ x \longmapsto \begin{cases} x^\alpha & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$ et pour tout x réel, soit $A(x)$ et $B(x)$ les matrices définies par :

$$A(x) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x \\ \operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\operatorname{ch} x} \end{pmatrix}$$

a) Montrer que pour tout x réel, $B(x) \leqslant A(x)$.

b) Pour $x \neq 0$, déterminer explicitement la décomposition spectrale de $A(x)$.

c) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $p_\alpha(A(x)) = A(\alpha x)$.

d) Montrer que $p_\alpha(B(x)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{(\operatorname{ch} x)^\alpha} \end{pmatrix}$.

e) Calculer $\det\left[p_\alpha(A(x)) - p_\alpha(B(x))\right]$. En donner un équivalent simple au voisinage de $x = 0$ et en déduire que pour $\alpha > 1$, p_α n'est pas matriciellement croissante sur $]0, +\infty[$.

PARTIE III

On suppose désormais que S est définie positive.

III.1 a) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $A\ :\ I \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ ,\ t \longmapsto A(t) = (a_{ij}(t))$ une application telle que pour tout (i, j) de $[\![1, n]\!]^2$, $t \longmapsto a_{ij}(t)$ est intégrable sur I. Montrer que pour toute matrice colonne X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $t \longmapsto {}^tXA(t)X$ est intégrable sur I et :

$$\int_I {}^tXA(t)X\,dt = {}^tX \left(\int_I A(t)\,dt \right) X$$

b) Soit f une application de I dans $\mathbb{R}$ intégrable sur I et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Justifier l'existence de $\displaystyle\int_I f(t)M dt$ et montrer que :

$$\int_I f(t)M dt = \left(\int_I f(t)dt\right) M$$

III.2 Soit $\alpha \in]0,1[$ et F la fonction donnée par $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+xt)t^\alpha} dt$.

a) Montrer que pour tout $x > 0$, $F(x)$ existe.

b) Montrer, en utilisant par exemple le changement de variable $u = xt$, qu'il existe une constante C strictement positive telle que pour tout $x > 0$, $F(x) = Cx^\alpha$.

c) Montrer que pour tout $t > 0$, $S^{-1} + tI_n$ est inversible et $(S^{-1} + tI_n)^{-1} = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda_i}{1+\lambda_i t} P_i$.

d) En déduire $F(S) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}(S^{-1} + tI_n)^{-1} dt$.

e) Soit A et B deux matrices de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $A \leqslant B$. Montrer que :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \; , \; \forall t > 0 \; , \; {}^tX(A^{-1} + tI_n)^{-1}X \leqslant {}^tX(B^{-1} + tI_n)^{-1}X$$

En déduire que F est matriciellement croissante sur $]0, +\infty[$, puis que pour $\alpha \in]0,1[$, la fonction p_α introduite en **II.5** est matriciellement croissante sur $]0, +\infty[$.

III.3 a) Montrer que pour tout $x > 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t}\right) dt = \ln x$.

b) En déduire $\ln S = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t^2} I_n - (S + tI_n)^{-1}\right) dt$.

c) Montrer que la fonction $\ln$ est matriciellement croissante sur $]0, +\infty[$.

Fin de l'énoncé