SESSION 2009 CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES MPM2006

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE MP

MATHEMATIQUES 2

Durée : 4 heures

Les calculatrices ***sont autorisées.***

* * *

NB: Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

* * *

Ce sujet est composé de deux exercices et d'un problème tous indépendants.

Remarques :

- Il n'est pas demandé le détail des calculs sur la copie lorsque le candidat aura besoin de calculer un déterminant, un produit de matrices, l'inverse d'une matrice ou tout autre calcul. Par exemple, pour un déterminant, il pourra se contenter d'écrire le déterminant à calculer et de donner la réponse.
- On rappelle que le candidat doit indiquer les théorèmes utilisés et lorsqu'il s'agira des théorèmes de Bézout et Gauss il indiquera leur nom.

PREMIER EXERCICE

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, u un endomorphisme de E et P un polynôme à coefficients réels.

1. Si λ est une valeur propre de u, démontrer que $P(\lambda)$ est une valeur propre de l'endomorphisme $P(u)$ de E.
2. On suppose que $P(u)$ est l'endomorphisme nul : $P(u) = 0$.
   (a) Montrer que toute valeur propre de u est racine de P.
   (b) Réciproquement, toute racine de P est-elle valeur propre de u ?
3. On suppose dans cette question que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension **impaire** et que u est un endomorphisme de E vérifiant $u^3 - u^2 + u - id = 0$. Déterminer le spectre de u.

Téléchargé sur PrépaBooster - https://prepabooster.fr

Deuxième exercice

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique et on note (e_1, e_2, e_3) sa base canonique. On note $w = 2e_1 + 3e_2 + e_3$ et Π le plan vectoriel d'équation $2x + 3y + z = 0$. On note s la symétrie orthogonale par rapport au plan Π et S la matrice de s dans la base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$.

1. Donner une base (u, v) du plan Π et justifier, sans calcul, que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Écrire la matrice S' de la symétrie s dans la base (u, v, w).
3. En déduire la matrice S.

Problème : Résultant de deux polynômes

I. Définition et propriétés

Soit p et q deux entiers naturels non nuls, soit

$$P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \quad \text{et} \quad Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$$

deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ avec $a_p \neq 0, b_q \neq 0$.
Le résultant des polynômes P et Q est le nombre complexe noté $\operatorname{Res}(P, Q)$:

$$\operatorname{Res}(P,Q) = \begin{vmatrix} a_0 & & & & b_0 & & \\ a_1 & \ddots & & & b_1 & \ddots & \\ \vdots & & a_0 & & \vdots & & b_0 \\ a_p & & a_1 & a_0 & \vdots & & b_1 \\ & \ddots & \vdots & a_1 & b_q & & \vdots \\ & & a_p & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & a_p & & & b_q \end{vmatrix}.$$

C'est un déterminant $q + p$ colonnes, dont les q premières colonnes représentent les coefficients du polynôme P et les p suivantes représentent les coefficients du polynôme Q ; les positions non remplies étant des zéros.
Par exemple, si $P = 1 + 2X + 3X^2$ et $Q = 4 + 5X + 6X^2 + 7X^3$,

$$\operatorname{Res}(P,Q) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 7 \end{vmatrix}.$$

La matrice servant à définir $\operatorname{Res}(P,Q)$ pourra être notée $M_{P,Q}$:

$$\operatorname{Res}(P,Q) = \det M_{P,Q}.$$

On note $E = \mathbb{C}_{q-1}[X] \times \mathbb{C}_{p-1}[X]$ et $F = \mathbb{C}_{p+q-1}[X]$.
Soit u l'application de E vers F définie pour $(A, B) \in E$ par : $u(A, B) = PA + QB$.

1. **Cas où u est bijective**
   (a) Démontrer que u est une application linéaire.
   (b) Si on suppose que u est bijective, démontrer que P et Q sont premiers entre eux.

Téléchargé sur PrépaBooster - https://prepabooster.fr

(c) Si on suppose que P et Q sont premiers entre eux, déterminer $\mathrm{Ker} u$ et en déduire que u est bijective.

2. **Matrice de u**

On note $\mathcal{B} = ((1,0),(X,0),...,(X^{q-1},0),(0,1),(0,X),...,(0,X^{p-1}))$ une base de E et $\mathcal{B}' = (1,X,...,X^{p+q-1})$ la base canonique de F.

(a) Déterminer la matrice de u par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

(b) Démontrer que $\mathrm{Res}(P,Q) \neq 0$ si et seulement si, P et Q sont premiers entre eux (donc $\mathrm{Res}(P,Q) = 0$ si et seulement si, P et Q ont au moins une racine commune complexe).

3. **Racine multiple**

(a) Démontrer qu'un polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ admet une racine multiple dans $\mathbb{C}$ si et seulement si, $\mathrm{Res}(P,P') = 0$.

(b) *Application* : déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le polynôme $X^3 + aX + b$ admette une racine multiple.

II. Applications

4. **Équation de Bézout**

Dans cette question, on note $P = X^4 + X^3 + 1$ et $Q = X^3 - X + 1$.

(a) Démontrer, en utilisant la première partie, que les polynômes P et Q sont premiers entre eux.

(b) On cherche un couple (A_0, B_0) de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tel que

$$PA_0 + QB_0 = 1.$$

Expliquer comment on peut trouver un tel couple en utilisant la matrice de u puis donner un couple solution.

(c) Déterminer tous les couples (A, B) de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant

$$PA + QB = 1.$$

On pourra commencer par remarquer que, si (A, B) est un couple solution, alors $P(A - A_0) = Q(B_0 - B)$.

5. **Équation d'une courbe**

(a) On considère la courbe Γ de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x(t) = t^2 + t \\ y(t) = t^2 - t + 1 \end{cases} \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}.$$

Étudier et construire la courbe Γ, on précisera les branches infinies.

(b) On se donne deux polynômes P et Q à coefficients réels et l'on pose, pour $(x, y, t) \in \mathbb{R}^3$, $A(t) = P(t) - x$ et $B(t) = Q(t) - y$. Établir que si un point M de coordonnées (x, y) appartient à la courbe de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x(t) = P(t) \\ y(t) = Q(t) \end{cases} \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}$$

alors les fonctions polynômes A et B ont une racine commune.

En déduire qu'un point M de coordonnées (x, y) appartenant à la courbe Γ vérifie :

$$x^2 + y^2 - 2xy - 4y + 3 = 0.$$

Téléchargé sur PrépaBooster - https://prepabooster.fr

(c) Expliquer brièvement et sans calcul, à partir de la matrice de la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^2$ par $q(x,y) = x^2+y^2-2xy$, la nature de la courbe d'équation cartésienne

$$x^2 + y^2 - 2xy - 4y + 3 = 0.$$

6. **Nombre algébrique**
En utilisant les polynômes

$$P(X) = X^2 - 3 \quad \text{et} \quad Q_y(X) = (y - X)^2 - 7,$$

déterminer un polynôme à coefficients entiers de degré 4 ayant comme racine $\sqrt{3} + \sqrt{7}$. Quelles sont les autres racines de ce polynôme ?

Fin de l'énoncé

Téléchargé sur PrépaBooster - https://prepabooster.fr