A 2008 MATH. I PC

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.

ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES
DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS,
DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE,
DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2008

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière PC

(**Durée de l'épreuve : 3 heures**)
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
ENSTIM, TELECOM SudParis (ex TELECOM INT), TPE-EIVP, Cycle international

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La partie III est indépendante des deux premières.

I Préliminaires

Pour $n \in \mathbf{N}$, $\{a_0, a_1, \cdots, a_n\}$ un ensemble de $n+1$ complexes distincts et pour i entier compris entre 0 et n, on définit le polynôme L_i par :

$$L_i(X) = \prod_{0 \leqslant j \leqslant n, j \neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}.$$

1. Montrer que les polynômes L_i forment une base de $\mathbf{C}_n[X]$.

2. Écrire la matrice M du système $\{1, X, X^2, \cdots, X^n\}$ dans la base $\{L_0, L_1, \cdots, L_n\}$.

II Fonctions polynomiales

Dans cette partie, on note k un entier naturel fixé et E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à k. Pour $a \in \mathbf{C}^*$, on définit

$$\begin{aligned} t_a \,:\, & E \longrightarrow E \\ & P \longmapsto (X \mapsto P(X+a)). \end{aligned}$$

Pour $P \in E$, on note $d(P)$ le polynôme dérivé :

$$\begin{aligned} d \,:\, & E \longrightarrow E \\ & P \longmapsto P'. \end{aligned}$$

Pour $k \geqslant 2$, on pose $d^k = d^{k-1} \circ d = d \circ d^{k-1}$. On tiendra pour acquis que t_a et d sont des endomorphismes de E. On désignera par $\mathcal{B} = \{e_0, e_1, \cdots, e_k\}$ la base de E définie par $\{1, X, X^2, \cdots, X^k\}$.

3. Écrire les matrices, notées respectivement T_a et D, des endomorphismes t_a et d dans la base $\mathcal{B}$.

4. En déduire les éléments propres de ces endomorphismes. On donnera les valeurs propres, les espaces propres correspondants ainsi que leurs dimensions.

5. Quels sont les sous-espaces vectoriels de E stables par d ? Donner leur nombre. *Indication : on pourra considérer un polynôme de degré maximal dans F, sous-espace stable.*

6. Soit $P(X) = \sum_{i=0}^{k} p_i X^i$ un polynôme fixé de degré k ($p_k \neq 0$). Montrer que le système
$$\left\{P, \frac{d(P)}{1!}, \frac{d^2(P)}{2!}, \cdots, \frac{d^k(P)}{k!}\right\}$$
constitue une base $\mathcal{B}_1$ de E. Donner la matrice de passage R de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}_1$.

7. Pour $a \in \mathbf{C}^*$, exprimer les coordonnées du système
$$S = \{P(X), P(X+a), P(X+2a), \cdots, P(X+ka)\}$$
dans la base $\mathcal{B}_1$. On note U la matrice ainsi obtenue. En déduire que S constitue une base de E qu'on notera $\mathcal{B}_2$.

8. On note Q la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}_2$. Exprimer Q en fonction de R et U.

9. Pour a fixé dans $\mathbf{C}^*$, caractériser les sous-espaces vectoriels de E stables par t_a.

III Fonctions continues, 2π-périodiques

Dans cette partie, E désigne l'espace vectoriel des fonctions complexes continues sur $\mathbf{R}$ et 2π-périodiques. Pour $f \in E$, on désignera par $c_n(f)$ la suite (indexée sur $\mathbf{Z}$) des coefficients de Fourier de f : pour tout entier relatif n,
$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} \, \mathrm{d}x.$$
Pour tout entier relatif k, on notera e_k la fonction
$$e_k \,:\, x \longmapsto \exp(ikx).$$
Pour $a \in \mathbf{R}$ et $f \in E$, on note $t_a(f)$ la fonctions à valeurs dans $\mathbf{C}$ définie
$$t_a(f) \,:\, x \longmapsto f(x+a).$$
Cela nous permet de définir l'endomorphisme t_a de E :
$$\begin{aligned} t_a \,:\, E &\longrightarrow E \\ f &\longmapsto t_a(f). \end{aligned}$$

Pour tout réel a, on définit la fonction ϕ_a par

$$\begin{aligned} \phi_a \;:\; \mathbf{Z} &\longrightarrow \mathbf{C} \\ n &\longmapsto \exp(ina). \end{aligned}$$

10. Préciser les réels a pour lesquels la fonction ϕ_a est injective. Dans le cas contraire, montrer que ϕ_a est périodique.

11. Pour $f \in E$, donner les valeurs de la suite $c_n(t_a(f))$ en fonction des valeurs prises par la suite $c_n(f)$.

12. Donner les valeurs propres de t_a. Caractériser les valeurs de a pour lesquelles les espaces propres de t_a sont tous de dimension 1.

13. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $p \geqslant 1$ et stable par t_a. Soit $f \in F$, f non nul, montrer qu'il existe $p+1$ scalaires α_j non tous nuls tels que pour tout entier relatif n,
$$\left(\sum_{j=0}^{p} \alpha_j \exp(inaj) \right) c_n(f) = 0.$$

14. Soit a réel fixé tel que a/π soit irrationnel. Soit f appartenant à F, montrer qu'il existe un entier N_f tel que $c_n(f) = 0$ pour $|n| \geqslant N_f$.

15. Montrer qu'il existe un entier N tel que pour tout g appartenant à F, $c_n(g) = 0$ pour $|n| \geqslant N$.

16. Soit G le sous-espace vectoriel de E engendré par $(e_k,\, k = -N, \cdots, N)$. Vérifier que $F \subset G$ et G stable par t_a.

17. L'endomorphisme t_a restreint à G est-il diagonalisable ?

18. Montrer qu'on peut trouver un ensemble fini S d'entiers relatifs tel que F soit le sous-espace vectoriel engendré par les e_k pour k décrivant S.

Fin du problème