



## EPREUVE SPECIFIQUE – FILIERE MP

## MATHEMATIQUES 2

Durée : 4 heures

*Les calculatrices sont autorisées.*

\* \* \*

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

\* \* \*

Groupes d'isométries sur  $\mathbb{R}^n$ **Notations**

Dans ce sujet,  $n$  est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et on note :

- $E$  l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  sa base canonique
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire **canonique** sur  $E$  : si  $x = (x_1, \dots, x_n)$  et  $y = (y_1, \dots, y_n)$  sont deux vecteurs de  $E$ , on a  $\langle x, y \rangle = {}^tXY = \sum_{i=1}^n x_i y_i$  où  $X$  et  $Y$  sont les matrices colonnes des vecteurs  $x$  et  $y$  dans la base  $\mathcal{B}$  ( $\mathcal{B}$  est donc une base orthonormale pour  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ )
- $\mathcal{L}(E)$  la  $\mathbb{R}$ -algèbre des endomorphismes de  $E$
- $(GL(E), \circ)$  le groupe des automorphismes de  $E$
- $M_{n,1}(\mathbb{R})$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices à  $n$  lignes et une colonne
- $M_n(\mathbb{R})$  la  $\mathbb{R}$ -algèbre des matrices carrées réelles de taille  $n$
- $GL_n(\mathbb{R})$  le groupe des matrices inversibles de  $M_n(\mathbb{R})$
- pour une matrice  $A$  de  $M_n(\mathbb{R})$ ,  ${}^tA$  est sa matrice transposée
- $O_n(\mathbb{R})$  le groupe des matrices orthogonales, c'est-à-dire des matrices  $A$  de  $M_n(\mathbb{R})$  vérifiant  ${}^tAA = I_n$  où  $I_n$  est la matrice unité de  $M_n(\mathbb{R})$

- $S_n^{++}(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices symétriques définies positives de  $M_n(\mathbb{R})$ , c'est-à-dire des matrices  $A$  de  $S_n(\mathbb{R})$  vérifiant : pour toute matrice  $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$  non nulle,  ${}^tXAX > 0$ .

Si  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sont des réels, on note  $\text{diag}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  la matrice diagonale de  $M_n(\mathbb{R})$  qui admet pour coefficients diagonaux les réels  $x_1, x_2, \dots, x_n$  dans cet ordre.

Si  $p$  est un réel supérieur ou égal à 1, on note  $\|\cdot\|_p$  la **norme  $p$**  sur  $E$  :

$$\text{si } x = (x_1, \dots, x_n) \in E, \|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

On note  $\|\cdot\|_\infty$  la **norme infinie** sur  $E$  : si  $x = (x_1, \dots, x_n) \in E$ ,  $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ .

Une norme  $N$  sur  $E$  est dite **euclidienne** s'il existe un produit scalaire  $\varphi$  sur  $E$  tel que pour tout  $x \in E$ ,  $N(x) = \sqrt{\varphi(x, x)}$ .

## **Objectifs**

Si  $N$  est une norme sur  $E$ , on dit qu'un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  est une  **$N$ -isométrie** si pour tout  $x \in E$ ,  $N(u(x)) = N(x)$ .

On note  $\text{Isom}(N)$  l'ensemble des  $N$ -isométries.

L'objectif du problème est de déterminer le nombre d'éléments de  $\text{Isom}(N)$  dans le cas des normes euclidiennes puis des normes  $p$ .

## **I. Description des normes euclidiennes**

### **1. Identité du parallélogramme**

- a. Montrer que si  $N$  est une norme euclidienne alors elle vérifie l'identité du parallélogramme, c'est-à-dire pour tous vecteurs  $x$  et  $y$  de  $E$ , on a

$$(N(x+y))^2 + (N(x-y))^2 = 2[(N(x))^2 + (N(y))^2].$$

En déduire que la norme  $\|\cdot\|_\infty$  n'est pas euclidienne.

- b. Justifier que la norme  $\|\cdot\|_2$  est euclidienne puis montrer que pour  $p \neq 2$ , la norme  $\|\cdot\|_p$  n'est pas euclidienne.

### **2. Soit $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ .**

Si  $x = (x_1, \dots, x_n)$  et  $y = (y_1, \dots, y_n)$  sont deux vecteurs de  $E$ , on note  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  et  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$  les

matrices colonnes associées. Montrer que si l'on pose  $\langle x, y \rangle_s = {}^tXSY$ , alors  $\langle \cdot, \cdot \rangle_s$  définit un produit scalaire sur  $E$ .

3. Soit  $\varphi$  un produit scalaire sur  $E$  et  $S$  la matrice de coefficients  $(\varphi(e_i, e_j))$ . Justifier que pour tous vecteurs  $x$  et  $y$  de  $E$   $\varphi(x, y) = {}^t XSY$  et que  $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ .

On a donc montré que  $\varphi = \langle \cdot, \cdot \rangle_S$ .

Toute norme euclidienne peut donc s'écrire sous la forme  $N_S : x \mapsto \sqrt{{}^t X S X}$  avec  $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$  où  $X$  désigne la matrice colonne associée à  $x$ .

## II. Quelques généralités et exemples

Soit  $N$  une norme sur  $E$ .

4. Montrer que  $(\text{Isom}(N), \circ)$  est un sous-groupe de  $GL(E)$ .

### 5. Une caractérisation géométrique des $N$ -isométries

On note  $\Sigma(N) = \{x \in E, N(x) = 1\}$ , la sphère unité pour  $N$ .

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que  $u$  est une  $N$ -isométrie si et seulement si  $u(\Sigma(N)) = \Sigma(N)$ .

Le groupe des  $N$ -isométries est donc l'ensemble des endomorphismes laissant stable la  $N$ -sphère unité.

6. Dans cette question uniquement  $n = 2$  et donc  $E = \mathbb{R}^2$ .

On note  $s$  la symétrie orthogonale par rapport à la droite  $D = \text{Vect}\{e_1 - e_2\}$  où  $(e_1, e_2)$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^2$  et  $r$  la rotation vectorielle d'angle  $\frac{\pi}{3}$ .

Les endomorphismes  $s$  et  $r$  sont-ils des  $\|\cdot\|_1$ -isométries ?

7. Dans cette question uniquement  $n = 3$  et donc  $E = \mathbb{R}^3$ .

Si  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , on pose  $q(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xz$ , ce qui définit une forme quadratique  $q$ .

- a. On note  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ , déterminer une matrice symétrique  $S \in M_3(\mathbb{R})$ , telle que

$$q(x, y, z) = {}^t X S X.$$

- b. Déterminer une matrice  $P \in O_3(\mathbb{R})$  et une matrice diagonale  $D \in M_3(\mathbb{R})$  telles que  $S = P D {}^t P$ .

- c. Justifier alors que l'application  $N_q : (x, y, z) \mapsto \sqrt{q(x, y, z)}$  est une norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^3$ .

- d. Déterminer la nature géométrique de la quadrique  $\Sigma(N_q)$ , la sphère unité pour la norme  $N_q$  et en donner une équation simple dans une nouvelle base.

- e. Justifier que  $\Sigma(N_q)$  est une surface de révolution, préciser un vecteur qui dirige son axe.

- f. Dédurre de la question 5, par une considération géométrique, que  $\text{Isom}(N_q)$  a une infinité d'éléments.

### III. Étude de $\text{Isom}(N)$ lorsque $N$ est une norme euclidienne

Si  $u \in \mathcal{L}(E)$ , on note  $[u]_{\mathcal{B}}$  la matrice de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

Si  $N$  est une norme, on note  $\text{ISOM}(N) = \{[u]_{\mathcal{B}}, u \in \text{Isom}(N)\}$ . L'ensemble  $\text{ISOM}(N)$  est par construction un groupe isomorphe à  $\text{Isom}(N)$ , c'est « sa version matricielle ».

#### 8. Caractérisation matricielle des isométries euclidiennes

a. Soit  $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ ,  $N_S$  la norme euclidienne associée et  $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$  le produit scalaire associé. Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

Montrer que  $u$  est une  $N_S$ -isométrie si et seulement si pour tous vecteurs  $x$  et  $y$  de  $E$ , on a  $\langle u(x), u(y) \rangle_S = \langle x, y \rangle_S$ .

b. En déduire que  $u$  est une  $N_S$ -isométrie si et seulement si sa matrice  $A$  dans  $\mathcal{B}$  vérifie  ${}^tASA = S$ .

9. Reconnaître alors  $\text{ISOM}(\|\cdot\|_2)$ . Que peut-on dire du nombre d'éléments de  $\text{ISOM}(\|\cdot\|_2)$ ? Justifier votre réponse.

#### 10. Une application des polynômes interpolateurs

$\mathbb{R}_r[X]$  désigne le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à  $r$ .

On se donne  $r+1$  réels  $x_0 < x_1 < \dots < x_r$ .

On considère l'application linéaire  $u$  de  $\mathbb{R}_r[X]$  vers  $\mathbb{R}^{r+1}$  définie par

$$P \mapsto (P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_r)).$$

a. Déterminer le noyau de  $u$ . En déduire que pour tous réels  $y_0, y_1, \dots, y_r$ , il existe un unique polynôme  $L$  de  $\mathbb{R}_r[X]$  tel que pour tout  $i \in \{0, \dots, r\}$ ,  $L(x_i) = y_i$  (un tel polynôme est appelé polynôme interpolateur).

b. Application : soit  $n$  un entier naturel non nul et  $u_1, \dots, u_n$  des réels strictement positifs, on pose  $U = \text{diag}(u_1, \dots, u_n)$  et  $V = \text{diag}(\sqrt{u_1}, \dots, \sqrt{u_n})$ . Montrer qu'il existe un polynôme  $L$ , à coefficients réels, tel que  $V = L(U)$ .

#### 11. Racine carrée dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$

a. Soit  $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ . Déterminer une matrice  $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$  telle que  $A^2 = S$ . On dit que  $A$  est une racine carrée de  $S$ .

b. Soit  $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$  une autre racine carrée de  $S$ . Montrer qu'il existe un polynôme  $Q$ , à coefficients réels, tel que  $A = Q(B)$ . En déduire que  $A$  et  $B$  commutent.

c. Montrer que la somme de deux matrices symétriques définies positives est une matrice inversible.

d. Déduire des questions précédentes que  $A = B$  (on pourra calculer  $(A+B)(A-B)$ ).

Désormais, on note  $\sqrt{S}$  l'unique racine carrée dans  $S_n^{++}(\mathbb{R})$  de  $S$ .

## 12. Étude du groupe d'isométrie pour une norme euclidienne

Soit  $N$  une norme euclidienne. Il existe donc une matrice  $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$  telle que pour tout  $x \in E$ ,  $N(x) = N_S(x) = \sqrt{{}^t X S X}$  où  $X$  est le vecteur colonne associée à  $x$ .

- Montrer que si  $M \in O_n(\mathbb{R})$ , la matrice  $(\sqrt{S})^{-1} M \sqrt{S}$  appartient à  $\text{ISOM}(N_S)$ .
- Montrer que l'application  $\psi$  de  $O_n(\mathbb{R})$  dans  $\text{ISOM}(N_S)$  définie par  $M \mapsto (\sqrt{S})^{-1} M \sqrt{S}$  est une bijection.  
Le groupe d'isométrie d'une norme euclidienne est-il fini?

## IV. Étude du cardinal de $\text{Isom}(p)$

Dans cette partie  $p$  est un réel **strictement** supérieur à 1, on appelle **exposant conjugué** de  $p$  l'unique réel  $q$  tel que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

Pour alléger l'écriture, une  **$p$ -isométrie** désigne une isométrie pour la norme  $\|\cdot\|_p$  et on note  $\text{Isom}(p)$  le groupe des  $p$ -isométries.

Si  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $u^*$  désigne l'**adjoint** de  $u$  pour  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . On rappelle que  $u^* \in \mathcal{L}(E)$ , est caractérisé par l'égalité suivante : pour tout  $(x, y) \in E^2$ ,  $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$ .

## 13. Endomorphismes de permutation signée

$\mathcal{P}_n$  désigne le groupe des permutations de l'ensemble  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

Soit  $\sigma \in \mathcal{P}_n$  et  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, +1\}^n$ . On note  $u_{\sigma, \varepsilon}$  l'endomorphisme de  $E$  qui vérifie pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $u_{\sigma, \varepsilon}(e_i) = \varepsilon_i e_{\sigma(i)}$ .

- Montrer que  $u_{\sigma, \varepsilon}$  est une  $p$ -isométrie.
- Écrire la matrice de  $u_{\sigma, \varepsilon}$  dans la base canonique dans le cas où  $n = 4$ ,  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  et  $\varepsilon = (1, 1, -1, 1)$ .

## 14. Inégalité de Hölder

- Montrer que pour tous réels  $a$  et  $b$  positifs ou nuls, on a  $ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$ . On pourra utiliser la fonction logarithme népérien.
- En déduire que pour tous vecteurs  $x$  et  $y$  de  $E$ , on a  $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_p \|y\|_q$ . Ce résultat s'appelle **l'inégalité de Hölder** (on pourra d'abord démontrer l'inégalité lorsque  $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$ ).
- Que devient l'inégalité si  $p = 2$  ?

Dans toute la suite,  $u$  désigne une  $p$ -isométrie. On note  $(a_{ij})$  les coefficients de la matrice  $A = [u]_{\mathcal{B}}$ .

15. Montrer que pour tout  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $\sum_{i=1}^n |a_{ij}|^p = 1$ . En déduire la valeur de  $\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}|^p$ .

### 16. Une formule clé de dualité

Soit  $x \in E$ . On note  $\Sigma_q = \{z \in E, \|z\|_q = 1\}$ .

a. Justifier l'existence du réel  $\max_{y \in \Sigma_q} |\langle x, y \rangle|$ .

b. Justifier que  $\max_{y \in \Sigma_q} |\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_p$ .

Soit  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ; si  $x_i \neq 0$ , on pose  $y_i = \varepsilon_i |x_i|^{p-1} \|x\|_p^{1-p}$  où  $\varepsilon_i$  désigne le signe de  $x_i$  et si  $x_i = 0$ , on pose  $y_i = 0$ . On définit ainsi un vecteur  $y = (y_1, \dots, y_n)$ .

Montrer que  $|\langle x, y \rangle| = \|x\|_p$  puis montrer l'égalité suivante :  $\|x\|_p = \max_{y \in \Sigma_q} |\langle x, y \rangle|$ .

17. En déduire que si  $u$  est une  $p$ -isométrie,  $u^*$  est une  $q$ -isométrie. Donner alors, en justifiant, la valeur de  $\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ji}|^q$ .

18. On suppose de plus que  $p \neq 2$ .

a. Soient  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  des réels dans  $[0, 1]$  vérifiant  $\sum_{k=1}^r \alpha_k^p = \sum_{k=1}^r \alpha_k^q$ . Montrer avec soin que pour tout  $k \in \{1, 2, \dots, r\}$ ,  $\alpha_k$  ne prend qu'un nombre fini de valeurs à déterminer.

b. En déduire que pour tout  $i$  et  $j$  dans  $\{1, 2, \dots, n\}$ ,  $|a_{ij}|$  ne peut prendre que 2 valeurs différentes que l'on précisera (on rappelle que les  $a_{ij}$  sont les coefficients de la matrice d'une  $p$ -isométrie).

### 19. Conclusion

Montrer alors que lorsque  $p \neq 2$ ,  $\text{Isom}(p)$  est un groupe fini dont on déterminera le cardinal. On remarquera en particulier que ce cardinal est indépendant de  $p$ .

**Commentaire :** Les  $p$ -isométries pour  $p \neq 2$  sont seulement en nombre fini, contrairement aux isométries euclidiennes qui forment un groupe infini mais compact (pas très difficile à montrer). Sur  $\mathbb{R}^n$ , la géométrie euclidienne est donc plus riche que celle des normes  $p$  pour  $p \neq 2$ .

**Fin de l'énoncé**