



## EPREUVE SPECIFIQUE – FILIERE MP

**MATHEMATIQUES 1****Durée : 4 heures***Les calculatrices sont autorisées.*

\* \* \*

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

\* \* \*

**Le sujet est composé d'un exercice et d'un problème indépendants.****EXERCICE**

On considère la fonction  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :  $f(x, y) = \frac{x + y}{(1 + x^2)(1 + y^2)}$ .

- On pose  $F = [0, 1] \times [0, 1]$ , justifier que la fonction  $f$  est bornée sur  $F$  et y atteint sa borne supérieure. On pose alors  $M = \sup_{(x, y) \in F} f(x, y)$ .
- Montrer que si la borne supérieure est atteinte en un point de l'ouvert  $\Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[$  alors nécessairement  $M = \frac{3\sqrt{3}}{8}$ .
- Déterminer le maximum de la fonction  $f$  sur la frontière de  $F$  et le comparer à  $\frac{3\sqrt{3}}{8}$  (on pourra utiliser la calculatrice).  
Déterminer  $M$ .

# PROBLÈME : ÉCHANGES DE LIMITES ET D'INTÉGRALES

Toutes les fonctions de ce problème sont à valeurs réelles.

## PARTIE PRÉLIMINAIRE

Les résultats de cette partie seront utilisés plusieurs fois dans le problème.

### 1. Fonction Gamma d'Euler

- a. Soit  $x \in ]0, +\infty[$ , montrer que la fonction  $t \mapsto e^{-t} t^{x-1}$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$ .

On pose, pour  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ .

- b. Déterminer, pour  $x \in ]0, +\infty[$ , une relation entre  $\Gamma(x+1)$  et  $\Gamma(x)$  et en déduire  $\Gamma(n)$  pour tout entier naturel non nul  $n$ .

### 2. Fonction zêta de Riemann

On rappelle que la fonction zêta est définie sur  $]1, +\infty[$  par  $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ .

On connaît  $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ ,  $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$ , on sait que pour  $p$  entier pair,  $\zeta(p)$  est de la forme  $q\pi^p$

où  $q$  est un rationnel ; il a été démontré que certains  $\zeta(p)$  pour  $p$  entiers impairs sont irrationnels mais on ne sait pas s'ils le sont tous.

On se propose de rechercher des valeurs approchées de ces réels  $\zeta(p)$ .

- a. On note, pour  $n$  entier naturel non nul et  $x$  réel  $x > 1$ ,  $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^x} = \zeta(x) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^x}$ .

Prouver que, pour  $n$  entier naturel non nul et  $x$  réel  $x > 1$ ,  $R_n(x) \leq \frac{1}{(x-1)n^{x-1}}$ .

- b. On fixe l'entier  $p \geq 2$  et un réel  $\varepsilon > 0$ . Indiquer une valeur de  $n$  pour laquelle on a

$$\left| \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^p} - \zeta(p) \right| \leq \varepsilon.$$

- c. Donner, en utilisant la calculatrice, une valeur approchée de  $\zeta(7)$  à  $10^{-6}$  près.

## PREMIÈRE PARTIE : SUITES DE FONCTIONS

Préliminaire : Dans les questions 3 à 5 suivantes, on n'utilisera pas pour les démonstrations le théorème de convergence dominée, énoncé à la question 6.

### 3. Théorème de convergence uniforme pour les suites de fonctions

Démontrer le théorème suivant que l'on notera **TH 1** :

si  $(f_n)$  est une suite de fonctions continues sur le segment  $[a, b]$  qui converge uniformément

vers une fonction  $f$  sur  $[a, b]$ , alors, la suite de réels  $\left( \int_a^b f_n(x) dx \right)$  converge vers le réel

$$\int_a^b f(x) dx.$$

On commencera par donner un sens à l'intégrale  $\int_a^b f(x) dx$  juste en énonçant un théorème.

#### 4. Exemples et contre-exemples

- a. Déterminer une suite  $(f_n)$  de fonctions continues et affines par morceaux sur le segment  $[0, 1]$  qui converge simplement mais non uniformément vers une fonction  $f$  sur  $[0, 1]$  et telle que la suite de réels  $\left( \int_0^1 f_n(x) dx \right)$  ne converge pas vers le réel  $\int_0^1 f(x) dx$ .

Remarque : on peut se contenter d'une vision graphique et, dans ce cas, il est inutile d'exprimer  $f_n(x)$ , mais on attend une justification des deux propriétés demandées.

- b. Si  $(f_n)$  est une suite de fonctions continues sur le segment  $[0, 1]$ , démontrer qu'il est possible que la suite de réels  $\left( \int_0^1 f_n(x) dx \right)$  converge vers le réel  $\int_0^1 f(x) dx$  sans que la convergence de la suite de fonctions  $(f_n)$  ne soit uniforme sur  $[0, 1]$ .

#### 5. Cas d'un intervalle quelconque

- a. Montrer à l'aide de la suite de fonctions  $(f_n)_{n \geq 1}$  définies sur  $I = [0, +\infty[$  par

$$f_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!}$$

que le **TH 1** n'est pas vrai si on remplace l'intervalle  $[a, b]$  par un intervalle  $I$  non borné.

Remarque : on pourra utiliser la formule de Stirling sans la démontrer.

- b. Nous allons prouver que le **TH 1** est vrai sur un intervalle borné  $I$ .

On considère  $(f_n)$  une suite de fonctions continues et intégrables sur  $I$  intervalle borné, qui converge uniformément vers une fonction  $f$  sur  $I$ .

- i. Justifier l'existence d'un entier naturel  $p$  tel que, pour tout réel  $x \in I$ ,  $|f(x)| \leq 1 + |f_p(x)|$  et en déduire que  $f$  est intégrable sur  $I$ .
- ii. Montrer que la suite de réels  $\left( \int_I f_n(x) dx \right)$  converge vers le réel  $\int_I f(x) dx$ . On notera  $\ell(I)$  la longueur de l'intervalle  $I$ .

#### 6. Théorème de convergence dominée pour les suites de fonctions

On rappelle le théorème suivant que l'on notera **TH 2** :

si  $(f_n)$  est une suite de fonctions continues par morceaux sur un intervalle  $I$  qui converge simplement sur  $I$  vers une fonction  $f$  continue par morceaux sur  $I$  et s'il existe une fonction  $\varphi$  continue par morceaux et intégrable sur  $I$  telle que, pour tout entier naturel  $n$  et tout réel  $x \in I$  :  $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$  alors, la fonction  $f$  est intégrable sur  $I$  et la suite de réels  $\left( \int_I f_n(x) dx \right)$  converge vers le réel  $\int_I f(x) dx$ .

- a. Rappeler pourquoi il est inutile de vérifier, lorsqu'on utilise ce **TH 2**, que les fonctions  $f_n$  sont intégrables sur  $I$  et justifier que  $f$  est intégrable sur  $I$ .
- b. Exemples
- Montrer à l'aide d'un exemple simple que ce théorème peut être pratique sur un segment  $I$  sur lequel la suite de fonctions  $(f_n)$  ne converge pas uniformément vers la fonction  $f$ .
  - Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin(\frac{x}{n})}}{1+x^2} dx$ .

## DEUXIÈME PARTIE : SÉRIES DE FONCTIONS

### 7. Théorème de convergence uniforme pour les séries de fonctions

Justifier, simplement, à l'aide du **TH 1** le théorème suivant que l'on notera **TH 3** :

si  $\sum f_n$  est une série de fonctions continues sur le segment  $[a, b]$  qui converge uniformément sur  $[a, b]$ , alors, la série de réels  $\sum \int_a^b f_n(x) dx$  converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \left( \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) dx.$$

### 8. Application : séries trigonométriques et séries de Fourier

On appellera série trigonométrique une série de fonctions du type  $\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$  où  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont deux suites de réels.

La série de Fourier d'une fonction  $2\pi$ -périodique et continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$  est donc une série trigonométrique.

- a. Montrer qu'une série trigonométrique n'est pas toujours la série de Fourier d'une fonction  $2\pi$ -périodique et continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$ .

Pour cela, utiliser la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin(nx)$  avec le théorème de Parseval que l'on commencera par énoncer.

- b. Montrer qu'une série trigonométrique qui converge uniformément sur  $\mathbb{R}$  est la série de Fourier d'une fonction  $2\pi$ -périodique et continue sur  $\mathbb{R}$ .

On utilisera sans démonstration les résultats classiques pour  $n$  et  $p$  entiers naturels :

$$\int_0^{2\pi} \cos(px) \cos(nx) dx = \int_0^{2\pi} \sin(px) \sin(nx) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq p \\ \pi & \text{si } n = p \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{et } \int_0^{2\pi} \sin(px) \cos(nx) dx = 0.$$

## 9. Intégration terme à terme d'une série de fonctions

On rappelle le théorème suivant que l'on notera **TH 4** :

si  $\sum f_n$  est une série de fonctions continues par morceaux et intégrables sur un intervalle  $I$

qui converge simplement vers une fonction  $f$  continue par morceaux sur  $I$  telle que la série

$\sum \int_I |f_n(x)| dx$  converge, alors  $f$  est intégrable sur  $I$ , la série  $\sum \int_I f_n(x) dx$  converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(x) dx = \int_I \left( \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) dx.$$

### Application : théorème de Hardy

On suppose que  $\sum a_n$  est une série de réels absolument convergente.

- Montrer que la série de fonctions  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n x^n}{n!}$  converge simplement vers une fonction  $f$  continue sur  $\mathbb{R}$ .
- Montrer que la fonction  $x \mapsto f(x) e^{-x}$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$  et exprimer  $\int_0^{+\infty} f(x) e^{-x} dx$  comme la somme d'une série numérique.

## 10. Cas où les théorèmes TH 3 et TH 4 ne s'appliquent pas

- Montrer que, la série de fonctions  $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$  ne converge pas uniformément sur

l'intervalle borné  $I = [0, 1[$  (donc les hypothèses du théorème **TH 3** ne sont pas toutes vérifiées).

- Montrer que, pour la série de fonctions  $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$  sur  $I = [0, 1[$ , les hypothèses du théorème **TH 4** ne sont pas toutes vérifiées.

- Montrer que, néanmoins,  $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^n x^n dx$  converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^n x^n dx = \int_0^1 \left( \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \right) dx.$$

## 11. Théorème de convergence monotone

Soit  $\sum f_n$  une série de fonctions continues par morceaux et intégrables sur un intervalle  $I$  qui

converge simplement vers une fonction  $f$  continue par morceaux sur  $I$ .

On suppose que toutes les fonctions  $f_n$  sont positives sur  $I$  et que la fonction  $f$  est intégrable sur  $I$ .

On pose, pour tout entier naturel  $n$  non nul et tout  $x \in I$ ,  $S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$ .

Montrer que la suite de fonctions  $(S_n)$  vérifie les hypothèses du théorème de convergence dominée **TH 2**, et en déduire que :

la série  $\sum_{n \geq 0} \int_I f_n(x) dx$  converge et  $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(x) dx = \int_I \left( \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) dx$ .

## 12. Application à la physique

- a. Calculer, après avoir justifié son existence, l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{e^t - 1} dt$ .

On détaillera toutes les étapes et on pourra remarquer que, pour  $t \in ]0, +\infty[$ , on a

$$\frac{1}{e^t - 1} = \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}}.$$

Cette intégrale intervient notamment dans la théorie du rayonnement du corps noir.

La loi de Planck donne l'expression de la densité spectrale d'énergie électromagnétique  $u_\lambda$  rayonnée par le corps noir, en fonction de la longueur d'onde par la formule :

$$u_\lambda = \frac{8 \pi h c}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{h c}{k_B \lambda T}\right) - 1}$$

où  $h$  et  $k_B$  sont les constantes de Planck et de Boltzmann,  $c$  la célérité de la lumière dans le vide,  $\lambda$  la longueur d'onde et  $T$  la température.

Ainsi, la densité volumique totale d'énergie électromagnétique  $u$  (rayonnée sur tout le spectre des longueurs d'onde) s'écrit :  $u = \int_0^{+\infty} u_\lambda d\lambda$ .

Si on note  $M$  l'exitance totale d'un corps noir on sait que  $M$  et  $u$  sont liés par la relation  $M = \frac{c}{4}u$ .

- b. Démontrer la loi de Stefan :  $M = \sigma T^4$  où  $\sigma = \frac{2 \pi^5 (k_B)^4}{15 h^3 c^2}$ .

## 13. Généralisation

- a. Exprimer de même pour  $x$  réel  $x > 1$ , l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt$  en fonction de  $\Gamma(x)$  et  $\zeta(x)$ .
- b. En déduire la valeur de  $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt$  et une valeur approchée de  $\int_0^{+\infty} \frac{t^6}{e^t - 1} dt$ .

**Fin de l'énoncé.**