MATHÉMATIQUES I

Dans tout le problème on identifie les polynômes et les fonctions polynômes correspondantes.

Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe C^{∞} de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}[X]$ le sous-espace vectoriel des fonctions polynômes et $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n.

On pose

$$I_p(x) = \int_0^x e^{-t^2/2} t^p \, dt .$$

On ne cherchera pas à calculer I_0.

Partie I -

I.A - Déterminer le développement en série entière de x de la fonction

$$x \mapsto (1 + x^2)\, e^{x^2} .$$

I.B - On considère l'équation différentielle :

$$\text{(E)} \qquad y' - xy = (1 + x^2)\, e^{x^2/2} .$$

I.B.1) Donner la solution générale de l'équation (E).

On désigne par f la solution de (E) vérifiant la condition initiale $f(0) = 1$.

I.B.2) Donner l'expression de f. Montrer que $f(x)$ s'annule pour une seule valeur réelle de x, notée α.

I.B.3) On se propose de calculer une valeur approchée de α par la méthode de Newton.

a) Déterminer préalablement un intervalle $[\alpha_1, \alpha_2]$ de longueur $0{,}1$ contenant α. Rappeler le principe de la méthode de Newton et expliquer comment on peut l'appliquer à partir de l'intervalle $[\alpha_1, \alpha_2]$.

b) Écrire un algorithme, mettant en œuvre la méthode de Newton, permettant de déterminer une valeur approchée de α à 10^{-6} près. On utilisera le langage de programmation associé au logiciel de calcul formel utilisé.

c) Déterminer par l'algorithme mis en place une valeur approchée de α à 10^{-6} près.

Filière PSI

Partie II -

II.A -

II.A.1) Calculer I_1.

II.A.2) Trouver une relation entre I_p et I_{p-2}, pour $p \geq 2$.

II.B -

II.B.1) Montrer que pour tout entier naturel k, il existe une constante λ_k et un polynôme A_k tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ I_{2k+1}(x) = \lambda_k + e^{-x^2/2} A_k(x).$$

II.B.2) Déterminer λ_k et A_k.

II.C -

II.C.1) Montrer que pour tout entier naturel k, il existe une constante μ_k et un polynôme B_k tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ I_{2k}(x) = \mu_k I_0(x) + e^{-x^2/2} B_k(x).$$

II.C.2) Déterminer μ_k et le degré de B_k.

II.D -

II.D.1) Si le degré de P est égal à n, que peut-on dire du degré du polynôme : $1 + P'(X) - xP(X)$?

II.D.2) Montrer qu'il n'existe pas de polynôme P tel que $I_0(x) + P(x)\, e^{-x^2/2}$ soit une constante.

Partie III -

Soit ϕ l'application de E dans E définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \phi(f)(x) = f'(x) - xf(x).$$

III.A -

III.A.1) Montrer que ϕ est une application linéaire sur E.

III.A.2) Déterminer le noyau de ϕ.

III.A.3) L'application ϕ est-elle injective ? surjective ?

III.A.4) Expliciter $\phi^{-1}(g) = \{f \in E \mid \phi(f) = g\}$ à l'aide d'une constante C et de

$$\int_0^x e^{-t^2/2} g(t)dt.$$

III.B -

III.B.1) Quelle est l'image de f par $\phi \circ \phi$?

III.B.2) Résoudre l'équation différentielle : $y'' - 2xy' + (x^2 - 1)y = 0$.

III.C - On pose par convention $\phi^1 = \phi$ et, plus généralement, on définit, pour tout n entier, $n \geq 2$, ϕ^n par :

$$\phi^n = \phi^{n-1} \circ \phi = \phi \circ \phi^{n-1}.$$

III.C.1) Résoudre $\phi^2(f) = 0$.

III.C.2) Résoudre $\phi^n(f) = 0$.

Partie IV -

Soit ϕ_0 l'application linéaire de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \ \phi_0(P) = \phi(P).$$

IV.A - ϕ_0 est-elle injective ? surjective ?

IV.B -

IV.B.1) Montrer que pour tout n entier naturel, $X^{2n+1} \in \phi_0(\mathbb{R}[X])$.

IV.B.2) En déduire que tout polynôme impair appartient à $\phi_0(\mathbb{R}[X])$.

IV.C - Pour tout q, entier strictement positif, on définit le polynôme Q_q :

$$Q_q(X) = X^{2q} - (2q-1)X^{2q-2}.$$

IV.C.1) Déterminer un polynôme P tel que $Q_q = \phi_0(P)$.

On désigne par $\mathscr{P}$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ engendré par la famille $\{Q_q \mid q \in \mathbb{N}^*\}$.

IV.C.2) Montrer que pour tout entier naturel non nul q, le polynôme $X^{2q} - \mu_q$ est élément de $\mathscr{P}$.

On pourra remarquer que : $\dfrac{Q_k(X)}{\mu_k} = \dfrac{X^{2k}}{\mu_k} - \dfrac{X^{2k-2}}{\mu_{k-1}}$.

IV.C.3) Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Vect}(X, X^3, \ldots, X^{2n+1}, \ldots)$ et $\mathscr{P}$ sont en somme directe.

IV.C.4) Montrer que $\mathrm{Im}(\phi_0) = \mathrm{Vect}(X, X^3, \ldots, X^{2n+1}, \ldots) \oplus \mathscr{P}$.

Partie V -

On considère l'équation différentielle :

$$(1)\quad y' - xy = (1 + x^2)\, e^{x^2}$$

et on définit la fonction $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :

$$H(x) = \int_0^x (1 + t^2) e^{t^2/2} dt .$$

V.A - Donner la solution générale de l'équation (1) (l'expression de cette solution utilise la fonction H).

V.B - Déterminer une fonction $g,$ impaire, développable en série entière et solution de l'équation (1). Quel est le rayon de convergence de son développement en série entière ?

V.C - À l'aide des questions précédentes calculer :

$$\int_0^x (1 + t^2) e^{t^2/2} dt .$$

••• FIN •••