

# MATHÉMATIQUES I

Dans tout le problème on identifie les polynômes et les fonctions polynômes correspondantes.

Soit  $E$  l'espace vectoriel des fonctions de classe  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}[X]$  le sous-espace vectoriel des fonctions polynômes et  $\mathbb{R}_n[X]$  le sous-espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$ .

On pose

$$I_p(x) = \int_0^x e^{-t^2/2} t^p dt.$$

On ne cherchera pas à calculer  $I_0$ .

## Partie I -

**I.A** - Déterminer le développement en série entière de  $x$  de la fonction

$$x \mapsto (1+x^2) e^{x^2}.$$

**I.B** - On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad y' - xy = (1+x^2) e^{x^2/2}.$$

**I.B.1)** Donner la solution générale de l'équation (E).

On désigne par  $f$  la solution de (E) vérifiant la condition initiale  $f(0) = 1$ .

**I.B.2)** Donner l'expression de  $f$ . Montrer que  $f(x)$  s'annule pour une seule valeur réelle de  $x$ , notée  $\alpha$ .

**I.B.3)** On se propose de calculer une valeur approchée de  $\alpha$  par la méthode de Newton.

a) Déterminer préalablement un intervalle  $[\alpha_1, \alpha_2]$  de longueur 0,1 contenant  $\alpha$ . Rappeler le principe de la méthode de Newton et expliquer comment on peut l'appliquer à partir de l'intervalle  $[\alpha_1, \alpha_2]$ .

b) Écrire un algorithme, mettant en œuvre la méthode de Newton, permettant de déterminer une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-6}$  près. On utilisera le langage de programmation associé au logiciel de calcul formel utilisé.

c) Déterminer par l'algorithme mis en place une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-6}$  près.

# Filière PSI

## Partie II -

### II.A -

II.A.1) Calculer  $I_1$ .

II.A.2) Trouver une relation entre  $I_p$  et  $I_{p-2}$ , pour  $p \geq 2$ .

### II.B -

II.B.1) Montrer que pour tout entier naturel  $k$ , il existe une constante  $\lambda_k$  et un polynôme  $A_k$  tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, I_{2k+1}(x) = \lambda_k + e^{-x^2/2} A_k(x).$$

II.B.2) Déterminer  $\lambda_k$  et  $A_k$ .

### II.C -

II.C.1) Montrer que pour tout entier naturel  $k$ , il existe une constante  $\mu_k$  et un polynôme  $B_k$  tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, I_{2k}(x) = \mu_k I_0(x) + e^{-x^2/2} B_k(x).$$

II.C.2) Déterminer  $\mu_k$  et le degré de  $B_k$ .

### II.D -

II.D.1) Si le degré de  $P$  est égal à  $n$ , que peut-on dire du degré du polynôme :  $1 + P'(X) - xP(X)$  ?

II.D.2) Montrer qu'il n'existe pas de polynôme  $P$  tel que  $I_0(x) + P(x) e^{-x^2/2}$  soit une constante.

## Partie III -

Soit  $\phi$  l'application de  $E$  dans  $E$  définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \phi(f)(x) = f'(x) - xf(x).$$

### III.A -

III.A.1) Montrer que  $\phi$  est une application linéaire sur  $E$ .

III.A.2) Déterminer le noyau de  $\phi$ .

III.A.3) L'application  $\phi$  est-elle injective ? surjective ?

III.A.4) Expliciter  $\phi^{-1}(g) = \{f \in E \mid \phi(f) = g\}$  à l'aide d'une constante  $C$  et de

$$\int_0^x e^{-t^2/2} g(t) dt.$$

### III.B -

III.B.1) Quelle est l'image de  $f$  par  $\phi \circ \phi$  ?

III.B.2) Résoudre l'équation différentielle :  $y'' - 2xy' + (x^2 - 1)y = 0$ .

**III.C** - On pose par convention  $\phi^1 = \phi$  et, plus généralement, on définit, pour tout  $n$  entier,  $n \geq 2$ ,  $\phi^n$  par :

$$\phi^n = \phi^{n-1} \circ \phi = \phi \circ \phi^{n-1}.$$

III.C.1) Résoudre  $\phi^2(f) = 0$ .

III.C.2) Résoudre  $\phi^n(f) = 0$ .

## Partie IV -

Soit  $\phi_0$  l'application linéaire de  $\mathbb{R}[X]$  dans lui-même définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \phi_0(P) = \phi(P).$$

**IV.A** -  $\phi_0$  est-elle injective ? surjective ?

### IV.B -

IV.B.1) Montrer que pour tout  $n$  entier naturel,  $X^{2n+1} \in \phi_0(\mathbb{R}[X])$ .

IV.B.2) En déduire que tout polynôme impair appartient à  $\phi_0(\mathbb{R}[X])$ .

**IV.C** - Pour tout  $q$ , entier strictement positif, on définit le polynôme  $Q_q$  :

$$Q_q(X) = X^{2q} - (2q-1)X^{2q-2}.$$

IV.C.1) Déterminer un polynôme  $P$  tel que  $Q_q = \phi_0(P)$ .

On désigne par  $\mathcal{P}$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}[X]$  engendré par la famille  $\{Q_q \mid q \in \mathbb{N}^*\}$ .

IV.C.2) Montrer que pour tout entier naturel non nul  $q$ , le polynôme  $X^{2q} - \mu_q$  est élément de  $\mathcal{P}$ .

$$\text{On pourra remarquer que : } \frac{Q_k(X)}{\mu_k} = \frac{X^{2k}}{\mu_k} - \frac{X^{2k-2}}{\mu_{k-1}}.$$

IV.C.3) Montrer que les sous-espaces vectoriels  $\text{Vect}(X, X^3, \dots, X^{2n+1}, \dots)$  et  $\mathcal{P}$  sont en somme directe.

IV.C.4) Montrer que  $\text{Im}(\phi_0) = \text{Vect}(X, X^3, \dots, X^{2n+1}, \dots) \oplus \mathcal{P}$ .

## Partie V -

On considère l'équation différentielle :

$$(1) \quad y' - xy = (1 + x^2) e^{x^2}$$

et on définit la fonction  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  par :

$$H(x) = \int_0^x (1 + t^2) e^{t^2/2} dt.$$

**V.A** - Donner la solution générale de l'équation (1) (l'expression de cette solution utilise la fonction  $H$ ).

**V.B** - Déterminer une fonction  $g$ , impaire, développable en série entière et solution de l'équation (1). Quel est le rayon de convergence de son développement en série entière ?

**V.C** - À l'aide des questions précédentes calculer :

$$\int_0^x (1 + t^2) e^{t^2/2} dt.$$

---

••• FIN •••

---