

## EPREUVE SPECIFIQUE – FILIERE MP

## MATHEMATIQUES 2

Durée : 4 heures

*Les calculatrices sont interdites.*

\* \* \*

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

**Fonctions de matrices**Notations :

- Les  $\mathbb{K}$ -algèbres suivantes sont considérées au cours de ce texte :
  - L'algèbre  $M_n(\mathbb{K})$  des matrices carrées réelles d'ordre  $n$ .
  - Si  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ , d'intérieur non vide, on note  $C_I^\infty$  l'algèbre commutative des fonctions de classe  $C^\infty$  de  $I$  dans  $\mathbb{K}$ .
  - L'algèbre des fonctions polynomiales de  $I$  dans  $\mathbb{K}$  est usuellement identifiée à l'algèbre  $\mathbb{K}[X]$ .
- On y rencontre aussi les  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels suivants :
  - L'espace des colonnes réelles à  $n$  lignes noté  $M_{n,1}(\mathbb{K})$ .
  - L'espace  ${}_N[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] / \deg P \leq N\}$ , où  $N \in \mathbb{N}$ .
- Les notions de convergence dans  $M_{n,1}(\mathbb{K})$  et  $M_n(\mathbb{K})$  sont relatives aux normes respectives :
  - $\|X\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$ , si  $X = {}^t[x_1, \dots, x_n]$ .
  - $\|M\| = n \max_{1 \leq i, j \leq n} |m_{ij}|$ , si  $M = [m_{ij}]_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ .

**Objectifs du problème****Tournez la page S.V.P.**

Lorsque  $P \in \mathbb{C}[X]$  et  $A \in M_n(\mathbb{C})$ , on sait donner un sens à la matrice  $P(A)$  et l'on maîtrise bien le calcul polynomial sur  $A$  qui en résulte. En particulier, si  $M$  est une matrice de  $M_n(\mathbb{C})$ , on appelle **POLYNÔME MINIMAL** de  $M$  le polynôme unitaire  $P$  de plus bas degré tel que  $P(M) = 0$  ; il est immédiat (et on l'admettra) qu'il s'agit du polynôme minimal de l'endomorphisme  $u$  de  $\mathbf{R}^n$  dont  $M$  est la matrice dans la base canonique de  $\mathbf{R}^n$ .

Dans un premier temps, ce texte propose de donner un sens à la matrice  $f(A)$  POUR TOUTE FONCTION  $f$  DE CLASSE  $C^\infty$ , et cela moyennant des hypothèses convenables sur la matrice  $A$ . Autrement dit, on apprend à maîtriser un certain calcul fonctionnel sur  $A$ .

Dans un second temps, on exploite ces résultats pour résoudre un système différentiel linéaire.

Notations fixées pour tout le problème :

- On considère une matrice  $A$  de  $M_n(\mathbb{C})$  et l'on suppose que son polynôme minimal  $\Pi_A$  peut être écrit sous la forme :  $\Pi_A(X) = (X - \lambda_1)^{m_1} \dots (X - \lambda_r)^{m_r}$  avec :  $r \geq 1$  ; les  $\lambda_j$  sont des RÉELS distincts ; les  $m_j$  sont dans  $\mathbb{N}^*$ . On note alors  $m = \sum_{1 \leq j \leq r} m_j$  le degré de  $\Pi_A$ .
- On considère aussi un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ , d'intérieur non vide et contenant tous les  $\lambda_j$ .

La matrice  $A$  et l'intervalle  $I$  sont particularisés dans les divers exemples traités au cours du problème.

**Preliminaires :**

1. Établir que pour  $X$  dans  $M_{n,1}(\mathbb{C})$  et  $M$  dans  $M_n(\mathbb{C})$ , on a :  $\|MX\|_\infty \leq \|M\| \|X\|_\infty$ .
2. Soit  $\mathcal{M}$  un sous-espace vectoriel de dimension  $d \geq 1$  de  $M_n(\mathbb{C})$ , et soit  $\beta = (B_1, \dots, B_d)$  une base de  $\mathcal{M}$ .
  - a) Montrer que l'on définit une norme  $\mathcal{N}$  sur  $\mathcal{M}$  en posant  $\mathcal{N}(M) = \max_{1 \leq k \leq d} |x_k|$ , si  $M = \sum_{1 \leq k \leq d} x_k B_k$  est la décomposition de l'élément  $M$  de  $\mathcal{M}$  sur la base  $\beta$ .
  - b) Justifier l'existence de constantes réelles strictement positives  $a$  et  $b$  vérifiant :  $\forall M \in \mathcal{M}, a\|M\| \leq \mathcal{N}(M) \leq b\|M\|$ .
  - c) Soit  $(M_p)_{p \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $\mathcal{M}$  ; on note  $M_p = \sum_{1 \leq k \leq d} x_p(k) B_k$  la décomposition de  $M_p$  sur  $\beta$ . Montrer que la suite  $(M_p)_{p \in \mathbb{N}}$  converge vers 0 dans  $(M_n(\mathbb{C}), \|\cdot\|)$  si et seulement si CHAQUE SUITE RÉELLE  $(x_p(k))_{p \in \mathbb{N}}$  ( $k = 1, \dots, d$ ) converge vers 0.

## I – Une relation d'équivalence sur $C_I^\infty$

On convient de dire que des fonctions  $f$  et  $g$  de  $C_I^\infty$  « coïncident sur le spectre de  $A$  » lorsque :  $\forall j \in \{1, \dots, r\}, \forall k \in \{0, \dots, m_j - 1\}, f^{(k)}(\lambda_j) = g^{(k)}(\lambda_j)$ . Ce que l'on résume par la notation  $f \equiv_A g$ .  
 Un exemple : si  $\Pi_A(X) = X^2(X+1)$  la notation  $f \equiv_A g$  signifie :  $f(0) = g(0)$ ,  $f'(0) = g'(0)$  et  $f(-1) = g(-1)$ .

**3.** Soient  $\ell$  dans  $\mathbb{N}^*$ ,  $\lambda$  dans  $I$  et  $f$  dans  $C_I^\infty$  vérifiant :  $f^{(k)}(\lambda) = 0$  pour  $k = 0, 1, 2, \dots, \ell - 1$ .

**a)** Établir l'identité :  $\forall x \in I, f(x) = \int_\lambda^x \frac{(x-u)^{\ell-1}}{(\ell-1)!} f^{(\ell)}(u) du$ .

**b)** En déduire à l'aide d'un changement de variable, l'existence d'une fonction  $h$  vérifiant :

$$(1) \quad \forall x \in I, f(x) = (x - \lambda)^\ell h(x)$$

$$(2) \quad h \in C_I^\infty$$

**4.** Soient  $f$  et  $g$  dans  $C_I^\infty$ .

**a)** On suppose :  $\exists h \in C_I^\infty, f = g + h \Pi_A$ .

En considérant les dérivées successives de  $f - g$ , établir que  $f \equiv_A g$ .

**b)** On suppose  $f \equiv_A g$  ; en exploitant le **3.** justifier l'existence de  $h$  dans  $C_I^\infty$  vérifiant :

$$f = g + h \Pi_A.$$

**5.** Soient  $P$  et  $Q$  dans  $[[X]]$  ; prouver que les conditions suivantes sont équivalentes :

$$(1) \quad P \equiv_A Q$$

$$(2) \quad \exists H \in [[X]], P = Q + H \Pi_A.$$

## II – Définition de la matrice $f(A)$

**A.** On considère l'application  $\varphi$  de  ${}_{m-1}[X]$  vers  ${}^m$  qui associe à un polynôme  $P$  le  $m$ -uplet :

$$\varphi(P) = \left( (P^{(k_1)}(\lambda_1))_{0 \leq k_1 \leq m_1-1}, \dots, (P^{(k_r)}(\lambda_r))_{0 \leq k_r \leq m_r-1} \right).$$

**6.** Établir le caractère bijectif de  $\varphi$ .

**7.** Soit  $f$  dans  $C_I^\infty$  ; justifier l'existence d'un et d'un seul polynôme  $P_f$  de  $[[X]]$ , de degré inférieur ou égal à  $(m-1)$  et tel que :  $f \equiv_A P_f$ . On convient alors de DÉFINIR la matrice  $f(A)$  en posant :  $f(A) = P_f(A)$ .

**B. Quelques exemples**

**Tournez la page S.V.P.**

8. On suppose ici que  $f$  est polynomiale et l'on écrit :  $\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^N a_k x^k$ .

En effectuant une division euclidienne, montrer qu'avec la définition de la question 7, on obtient le résultat naturel :  $f(A) = \sum_{k=0}^N a_k A^k$ .

9. Ici :  $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$  et  $I = \mathbb{C}$ .

- Calculer  $\Pi_A(X)$ .
- Calculer la matrice  $f(A)$  dans chacun des cas suivants :
  - $f(x) = ax + b$ , les réels  $a$  et  $b$  étant donnés.
  - $f(x) = \sin(\pi x)$
  - $f(x) = (x-1)^2 g(x)$ , où la fonction  $g$  est donnée dans  $C_I^\infty$ .

### III – Le calcul systématique de $f(A)$

#### A. Une formule générale

10. En exploitant l'isomorphisme linéaire  $\varphi$  du II.A, justifier l'existence et l'unicité de polynômes  $Q_{j,k}$  ( $1 \leq j \leq r, 0 \leq k \leq m_j - 1$ ) vérifiant :

pour TOUTE fonction  $f$  de  $C_I^\infty$ , on a :  $P_f = \sum_{1 \leq j \leq r} \sum_{0 \leq k \leq m_j - 1} f^{(k)}(\lambda_j) Q_{j,k}$

On considère alors les matrices dites « associées » à  $A$  :

$$Z_{j,k} = Q_{j,k}(A) \quad (1 \leq j \leq r, 0 \leq k \leq m_j - 1).$$

11. Montrer que les diverses matrices  $Z_{j,k}$  sont linéairement indépendantes et que :

$$\forall f \in C_I^\infty, f(A) = \sum_{1 \leq j \leq r} \sum_{0 \leq k \leq m_j - 1} f^{(k)}(\lambda_j) Z_{j,k}$$

#### B. Deux exemples

12. Ici :  $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$  et  $I = \mathbb{C}_+^*$ .

- Justifier l'existence de matrices  $Z_1$  et  $Z_2$  de  $M_2(\mathbb{C})$  telles que :
 
$$\forall f \in C_I^\infty, f(A) = f(1)Z_1 + f'(1)Z_2.$$
- EN DÉDUIRE le calcul de  $Z_1$  et  $Z_2$ .
- Calculer les matrices  $A^{2004}, \sqrt{A}$  et plus généralement  $A^\alpha$  pour  $\alpha$  dans  $\mathbb{C}_+^*$ .

13. Ici :  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{K})$  et  $I = \mathbb{K}$ .

- Présenter sous forme factorisée le polynôme  $\Pi_A(X)$ . La matrice  $A$  est-elle diagonalisable dans  $M_3(\mathbb{K})$  ?
- Calculer les matrices  $Z_{j,k}$  « associées » à  $A$ .

#### IV – Un calcul fonctionnel sur la matrice $A$

##### A. Quelques identités bien naturelles

14. Soient  $f$  et  $g$  dans  $C_I^\infty$  et  $\alpha$  dans  $\mathbb{K}$ .

- Que valent  $P_{\alpha f}$  et  $P_{f+g}$  ?
- Justifier l'existence d'un polynôme  $H$  de  $\mathbb{K}[X]$  tel que :  $P_{fg} = P_f P_g + H \Pi_A$ .

15. a) Montrer que l'application  $S: f \mapsto f(A)$  de  $C_I^\infty$  dans  $M_n(\mathbb{R})$  est un morphisme de  $\mathbb{K}$ -algèbres.

b) Quel est son noyau ?

16. On considère les fonctions cosinus et sinus de  $\mathbb{K}$  dans  $\mathbb{K}$ , puis les fonctions  $f_1: x \mapsto \sqrt{x}$  et  $f_2: x \mapsto \frac{1}{x}$  de  $\mathbb{K}_+^*$  dans  $\mathbb{K}$ . On peut ainsi DÉFINIR les matrices  $\cos A$ ,  $\sin A$ , et même  $\sqrt{A}$  et  $\frac{1}{A}$  si les  $\lambda_j$  sont dans  $\mathbb{K}_+^*$ .

- En exploitant le morphisme  $S$ , calculer  $(\cos A)^2 + (\sin A)^2$ .
- On suppose ici que les  $\lambda_j$  sont strictement positifs. Reconnaitre :  $(\sqrt{A})^2$  et  $\frac{1}{A}$ .

##### B. Le spectre de $f(A)$

17. Montrer que l'ensemble noté  $\mathcal{M}_A = \{f(A) / f \in C_I^\infty\}$  est une sous-algèbre COMMUTATIVE de  $M_n(\mathbb{K})$  et préciser sa dimension.

18. Montrer que si un élément de  $\mathcal{M}_A$  est inversible dans  $M_n(\mathbb{K})$  alors son inverse est aussi dans  $\mathcal{M}_A$ .

19. Soit  $f$  dans  $C_I^\infty$  ; établir l'équivalence des énoncés suivants :

- $f(A)$  est inversible dans  $M_n(\mathbb{K})$ .

**Tournez la page S.V.P.**

$$(2) \quad \forall j \in \{1, \dots, r\} \quad f(\lambda_j) \neq 0$$

**20.** Si  $M$  est une matrice de  $M_n(\mathbb{K})$ , on note  $\Lambda_M$  l'ensemble de ses valeurs propres RÉELLES.

En exploitant la question **19** comparer les ensembles :  $\Lambda_A$  et  $\Lambda_{f(A)}$  où  $f$  est donnée dans  $C_I^\infty$ .

## V – Application à la résolution d'un système différentiel

**21.** Soient  $(f_p)_{p \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions de  $C_I^\infty$  et  $f$  dans  $C_I^\infty$ . Établir l'équivalence des énoncés suivants :

(1) La suite de matrices  $(f_p(A))_{p \in \mathbb{N}}$  converge dans  $M_n(\mathbb{K})$  vers  $f(A)$ .

(2) Pour chaque  $j$  ( $1 \leq j \leq r$ ) et chaque  $k$  ( $0 \leq k \leq m_j - 1$ ), la suite réelle  $(f_p^{(k)}(\lambda_j))_{p \in \mathbb{N}}$  converge vers  $f^{(k)}(\lambda_j)$ .

Lorsque la condition (2) est réalisée, on convient de dire que la suite de fonctions  $(f_p)_{p \in \mathbb{N}}$  « converge vers  $f$  sur le spectre de  $A$  ».

**22.** Pour  $t$  réel, on considère la fonction  $f_t : x \mapsto e^{tx}$  de  $\mathbb{K}$  dans  $\mathbb{K}$ . Montrer que :  $f_t(A) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{t^\ell}{\ell!} A^\ell$ . Il s'agit donc précisément de la matrice usuellement notée  $\exp(tA)$ .

**23.** En exploitant les résultats acquis à ce stade du problème, résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y + z \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 2y + z \\ \frac{dz}{dt} = x - y \end{cases}$$

**Fin de l'énoncé.**