

EPREUVE SPECIFIQUE – FILIERE MP

MATHEMATIQUES 1

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont interdites.

* * *

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

A propos de l'hypothèse « de classe C^1 par morceaux » du théorème de convergence normale d'une série de Fourier...

Pour toute fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continue par morceaux et de période 2π , on associe ses coefficients de Fourier exponentiels définis, pour $n \in \mathbb{Z}$, par $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-i n t} dt$ et ses coefficients de Fourier trigonométriques définis par :

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(n t) dt \text{ (pour } n \in \mathbb{N}) \text{ et } b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(n t) dt \text{ (pour } n \in \mathbb{N}^* \text{)}.$$

On pose, pour tout entier naturel p et tout réel x :

$$S_p(f)(x) = \sum_{n=-p}^p c_n(f) e^{i n x} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^p (a_n(f) \cos(n x) + b_n(f) \sin(n x)).$$

On rappelle le **théorème de convergence normale** :

Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue de période 2π et de classe C^1 par morceaux, la série de Fourier de f converge normalement vers la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, la fonction f est limite uniforme de la suite de polynômes trigonométriques $(S_p(f))_{p \in \mathbb{N}}$.

Nous allons étudier ce qui peut se produire si on enlève à ce théorème l'hypothèse « de classe C^1 par morceaux ».

Une première partie démontre des résultats préliminaires.

Une deuxième partie traite d'un exemple où, sans l'hypothèse « de classe C^1 par morceaux », la série de Fourier peut diverger.

Tournez la page S.V.P.

Une troisième partie recherche une condition plus faible pour que, sans l'hypothèse « de classe C^1 par morceaux », on puisse quand même assurer que la série de Fourier de f converge uniformément vers la fonction f sur $]$.

I. Résultats préliminaires

1. Si, dans le théorème de convergence normale ci-dessus, on suppose que la fonction f n'est pas continue mais seulement continue par morceaux sur $]$:
 - a. Rappeler le théorème de Dirichlet en précisant de quel type de convergence il s'agit.
 - b. Cette convergence pourrait-elle être uniforme sur $]$?

2. On considère la fonction continue $\varphi :] \rightarrow]$, de période 2π , paire et définie pour $x \in [0, \pi]$, par $\varphi(x) = \sqrt{x}$.
Donner l'allure de la courbe de cette fonction et expliquer pourquoi elle n'est pas de classe C^1 par morceaux sur $]$.

3. Théorème de Cesàro

Soit (u_n) une suite de complexes qui converge vers le complexe l .

- a. Justifier, simplement, en utilisant un théorème de sommation de relations de comparaison, que : $\sum_{k=0}^n (u_k - l) = o(n+1)$ au voisinage de $+\infty$.

- b. En déduire que la suite $\left(\frac{u_0 + u_1 + \dots + u_n}{n+1} \right)$ converge vers l .

4. Soit une fonction $f :] \rightarrow]$ continue et de période 2π dont la somme de Fourier de rang n est notée $S_n(f)$. Pour n entier naturel non nul, on définit la somme de Fejér de f de rang n , notée $\sigma_n(f)$ comme la moyenne de Cesàro des sommes de Fourier :

$$\sigma_n(f) = \frac{1}{n+1} (S_0(f) + S_1(f) + \dots + S_n(f)).$$

On démontre, *et nous l'admettons*, le **théorème de Fejér** :

« La suite de polynômes trigonométriques $(\sigma_n(f))$ converge uniformément sur $]$ vers la fonction f ».

Une application :

Si $f :] \rightarrow]$ est une fonction continue et de période 2π telle que la suite $(S_n(f))$ converge simplement sur $]$, montrer que la suite $(\sigma_n(f))$ converge vers la fonction f .

5. Si (u_n) est une suite de réels positifs qui converge vers 0, montrer qu'il existe une suite de réels (d_n) décroissante et de limite nulle telle que, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq d_n$ (on pourra, par exemple, vérifier que la suite $(\sup\{u_k, k \geq n\})_n$ convient).

II. Un exemple de Série de Fourier divergente (en un point)

On considère la suite de fonctions (f_n) définies sur l'intervalle $[0, \pi]$ pour tout entier naturel non nul n par : $f_n(x) = \frac{1}{n^2} \sin\left[\left(2^{n^3} + 1\right) \frac{x}{2}\right]$.

6. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur $[0, \pi]$.

On définit alors la fonction f paire, continue, de période 2π sur $\mathbb{R}$ et telle que pour tout réel $x \in [0, \pi]$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

7. On pose, pour p et k entiers naturels, $I_{p,k} = \int_0^\pi \cos(p t) \sin\left(\frac{2k+1}{2} t\right) dt$ et, pour q entier naturel,

$$T_{q,k} = \sum_{p=0}^q I_{p,k}.$$

a. Calculer, pour p et k entiers naturels, l'intégrale $I_{p,k}$.

b. Pour q et k entiers naturels, déterminer un réel positif c_k tel que $T_{q,k} = c_k + \sum_{j=k-q}^{k+q} \frac{1}{2j+1}$ et en déduire que, pour tout couple (q, k) d'entiers naturels, $T_{q,k} \geq 0$.

c. Déterminer, pour N au voisinage de $+\infty$, un équivalent simple de $\sum_{k=0}^N \frac{1}{2k+1}$.

d. En déduire que, pour k au voisinage de $+\infty$, $T_{k,k} \sim \frac{1}{2} \ln k$.

8. Montrer que, pour p entier naturel non nul, $a_p(f) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} I_{p, 2^{n^3}-1}$.

9. Montrer que, pour p entier naturel non nul, $S_{2^{p^3}-1}(f)(0) \geq \frac{-a_0(f)}{2} + \frac{2}{\pi p^2} T_{2^{p^3}-1, 2^{p^3}-1}$

(on remarquera que : $\frac{a_0}{2} + \sum_{l=1}^N a_l = \frac{-a_0}{2} + \sum_{l=0}^N a_l$).

Conclure que la suite $(S_n(f)(0))$ diverge.

III. Fonctions à variation bornée, Théorème de Jordan

Pour deux réels $a < b$ on note $S_{[a,b]}$ l'ensemble des subdivisions de l'intervalle $[a, b]$.

Tournez la page S.V.P.

Si f est une fonction de $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in S_{[a, b]}$, on note :

$$V(\sigma, f) = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|.$$

On dira que la fonction f est à variation bornée s'il existe un réel positif M tel que pour toute $\sigma \in S_{[a, b]}$, l'on ait : $V(\sigma, f) \leq M$.

On appelle alors **variation totale** de f sur $[a, b]$ le réel positif noté :

$$V([a, b], f) = \sup_{\sigma \in S_{[a, b]}} V(\sigma, f).$$

10. Montrer que la fonction $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = x \cos\left(\frac{\pi}{2x}\right)$ si $x \neq 0$ est continue et n'est pas à variation bornée sur $[0, 1]$.

(on pourra choisir $\sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq n+1}$ subdivision de $[0, 1]$: $x_0 = 0, x_{n+1} = 1$ et

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, x_k = \frac{1}{2(n+1-k)}).$$

11. Exemples généraux

- Montrer qu'une fonction $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ qui est monotone est à variation bornée sur $[a, b]$ et préciser $V([a, b], f)$.
- Montrer qu'une fonction $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ qui est somme de deux fonctions monotones est à variation bornée sur $[a, b]$.
- Montrer qu'une fonction $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ qui est continue et de classe C^1 par morceaux est à variation bornée.

12. Soit une fonction $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ à variation bornée sur $[a, b]$ et soit $a < c < b$.

Montrer que chacune des restrictions de f aux intervalles $[a, c]$ et $[c, b]$ est à variation bornée et que : $V([a, c], f) + V([c, b], f) \leq V([a, b], f)$.

Remarque : on peut même montrer qu'il y a égalité mais ce ne sera pas utile pour ce problème.

13. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et de période 2π telle que la restriction de f à l'intervalle $[0, 2\pi]$ soit à variation bornée.

Pour n entier relatif et N entier naturel, tous deux non nuls, on utilisera la subdivision

$$\sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq |n|N} \text{ de } [0, 2\pi] \text{ définie, pour } k \text{ entier compris entre } 0 \text{ et } |n|N, \text{ par : } x_k = \frac{2\pi k}{|n|N}.$$

Pour k entier compris entre 1 et $|n|N$, on notera $V_k(f)$ la variation totale de f sur l'intervalle $[x_{k-1}, x_k]$.

- Vérifier que : $\left| \sum_{k=1}^{|n|N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(t) - f(x_k)) e^{-int} dt \right| \leq \sum_{k=1}^{|n|N} V_k(f) (x_k - x_{k-1})$.

- b. Montrer que : $\left| \sum_{k=1}^{|n|N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k) e^{-int} dt \right| \leq \frac{1}{|n|} V([0, 2\pi], f).$
- c. En déduire que pour tout entier n non nul, $|c_n(f)| \leq \frac{V([0, 2\pi], f)}{2|n|\pi}.$

14. Soit (u_n) une suite de complexes, on pose, pour tout entier naturel n ,

$$S_n = \sum_{j=0}^n u_j \quad \text{et} \quad \sigma_n = \frac{S_0 + S_1 + \dots + S_n}{n+1}.$$

On suppose que la suite (σ_n) converge vers un complexe L et on suppose qu'il existe une constante réelle A non nulle telle que, pour tout entier naturel k , $|u_k| \leq \frac{A}{k+1}.$

a. Pour n et k entiers naturels non nuls, exprimer, à l'aide des termes de la suite (u_i) , l'expression : $k(S_n - L) - (n+k)(\sigma_{n+k-1} - L) + n(\sigma_{n-1} - L).$

b. Soit une suite de réels (d_n) décroissante et de limite nulle telle que, pour tout entier naturel n , $|\sigma_n - L| \leq d_n$, montrer que, pour n et k entiers naturels non nuls :

$$|S_n - L| \leq \left(1 + \frac{2n}{k}\right) d_{n-1} + A \frac{k-1}{2(n+2)}.$$

c. L'entier naturel non nul n étant donné, on choisit k tel que $(k-1)^2 \leq 4n^2 d_{n-1} < k^2$ ($k-1$ est donc la partie entière de $2n\sqrt{d_{n-1}}$).

Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $|S_n - L| \leq d_{n-1} + (1+A)\sqrt{d_{n-1}}.$ Que peut-on en déduire ?

15. Montrer que la série de Fourier d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et de période 2π telle que la restriction de f à l'intervalle $[0, 2\pi]$ soit à variation bornée converge uniformément vers la fonction f .

16. Montrer que la série de Fourier de la fonction φ de la question 2. converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction φ .

17. Application

Montrer que la série de Fourier d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de période 2π et lipschitzienne converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f .

Fin de l'énoncé

Tournez la page S.V.P.