MATHÉMATIQUES II

Dans tout le texte, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points et n est un entier strictement positif. On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients réels et on désigne par $E_n(I)$ l'ensemble des applications de classe C^1 de I dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Si $M \in E_n(I)$, M' désigne la dérivée de M. Parmi les éléments de $E_n(I)$, on s'intéresse en particulier à ceux qui vérifient l'une ou l'autre des propriétés qui suivent :

$$(P1)\ :\ \forall (x, y) \in I^2,\ M(x)M(y) = M(y)M(x)$$
$$(P2)\ :\ \forall x \in I,\ M'(x)M(x) = M(x)M'(x)$$

On adopte les notations suivantes : I_n désigne la matrice identité d'ordre n, $\mathbb{R}^n$ l'espace vectoriel des vecteurs-colonnes à n lignes, $O_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales réelles d'ordre n et $SO_n(\mathbb{R})$ le sous-groupe des matrices orthogonales réelles d'ordre n et de déterminant $+1$; si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on désigne par $M_{[i,j]}$ le coefficient de M en position (i, j) lorsque $1 \le i \le n$ et $1 \le j \le n$. Enfin, on dit d'une matrice triangulaire de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qu'elle est *stricte* si elle a les coefficients diagonaux tous nuls et d'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qu'elle est *scalaire* si elle est proportionnelle à l'identité ($M = \lambda I_n$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$).

Enfin, on rappelle que, si M est élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$t \mapsto \exp(tM) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} M^k$$

est un élément de $E_n(\mathbb{R})$ dont la dérivée est

$$t \mapsto M \exp(tM) = \exp(tM) M .$$

Partie I - Exemples élémentaires

I.A - .

I.A.1) Montrer que tout élément de $E_n(I)$ vérifiant $(P1)$ vérifie $(P2)$.

Filière MP

I.A.2) Démontrer que si M est une application élément de $E_n(I)$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'application $M^k : x \mapsto M(x)^k$ est élément de $E_n(I)$; calculer sa dérivée.

I.A.3) Démontrer que si M est une application élément de $E_n(I)$, telle que pour tout $x \in I$ la matrice $M(x)$ est inversible, alors l'application $M^{-1} : x \mapsto M(x)^{-1}$ est élément de $E_n(I)$; calculer sa dérivée.

I.B - Dans la suite de la Partie I, on prend $n = 2$.

Un élément M de $E_2(I)$ s'écrit pour $x \in I$:

$$M(x) = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{pmatrix}.$$

I.B.1) On suppose dans cette question que M vérifie $(P2)$ et que la fonction b ne s'annule pas. Que dire des fonctions

$$\frac{c}{b} \text{ et } \frac{d-a}{b} ?$$

Montrer, en l'explicitant, qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $x \in I$, $M(x) \in \mathrm{Vect}\{I_2, A\}$. Montrer que l'application M vérifie aussi $(P1)$.

I.B.2) Soit A une matrice non scalaire dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $X \in \mathbb{R}^2$ tel que (X, AX) soit une base de $\mathbb{R}^2$. On suppose X ainsi choisi. Si $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, il existe donc $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ tel que $BX = uX + vAX$.

Montrer que, si la matrice B commute avec A, elle s'écrit $B = uI_2 + vA$.

I.B.3) On suppose dans cette question que M vérifie $(P2)$ et que $M(x)$ n'est scalaire pour aucun x de I.

Montrer qu'il existe un unique couple (u, v) d'applications continues de I dans $\mathbb{R}$ tel que $M'(x) = u(x)I_2 + v(x)M(x)$ pour tout $x \in I$. Pour $x_0 \in I$ donné, on pose alors $C(x) = M(x)M(x_0) - M(x_0)M(x)$ pour tout $x \in I$. Montrer que C vérifie une équation différentielle matricielle très simple, dans laquelle intervient la fonction v et la résoudre en la ramenant par exemple à des équations différentielles ordinaires. En conclure que M vérifie $(P1)$.

I.B.4) Dans cette question, on s'intéresse à $E_2(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $(P2)$ est vérifiée lorsqu'on choisit pour a, b, c et d les fonctions qui à x réel associent respectivement $1+x^2$, $x|x|$, x^2 et $1-x^2$.

b) Déterminer soigneusement les éléments de $E_2(\mathbb{R})$ de la forme

$$x \mapsto \begin{pmatrix} 1+x^2 & b(x) \\ c(x) & 1-x^2 \end{pmatrix} \text{ vérifiant } (P2).$$

Pour chaque élément de $E_2(\mathbb{R})$ ainsi trouvé,

- dire s'il vérifie $(P1)$,
- déterminer la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ engendré par l'ensemble des $M(x)$, noté $\mathrm{Vect}\{M(x),\ x \in \mathbb{R}\}$.

I.C - Soit M un élément de $E_2(I)$ tel que pour tout $x \in I$, $M(x)$ est la matrice d'une réflexion.

I.C.1) Montrer qu'il existe une application θ de classe C^1 de I dans $\mathbb{R}$ telle que la première colonne de $M(x)$ soit

$$\begin{pmatrix} \cos\ \theta(x) \\ \sin\ \theta(x) \end{pmatrix} \text{ pour tout } x \in I.$$

I.C.2) À quelle condition, portant sur la fonction θ, M vérifie-t-elle $(P2)$?

On dit d'une application de $I \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qu'elle est *de type* $(\mathcal{Q})$ (abréviation pour *quasi-polynomial*) si elle est de la forme

$$(x, M) \mapsto \sum_{k=0}^{m} a_k(x)\ P_k(x)\ M^k\ Q_k(x)$$

où sont donnés

$$\begin{cases} m \in \mathbb{N} \\ a_0, \ldots, a_m \text{ de classe } C^0 \text{ de } I \text{ dans } \mathbb{R} \\ P_0, \ldots, P_m, Q_0, \ldots, Q_m \text{ de classe } C^0 \text{ de } I \text{ dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \end{cases}$$

On dira qu'une telle application est *polynomiale* si, de plus, les applications P_k et Q_k sont toutes constantes, égales à I_n.

On admettra alors le théorème $\mathcal{T}$ suivant, qui est une version du théorème de Cauchy-Lipschitz :

a) Si $F : I \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de type $(\mathcal{Q})$, et si $(x_0, U_0) \in I \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une unique solution maximale U de l'équation différentielle matricielle $M'(x) = F(x, M(x))$, définie sur un intervalle J tel que $x_0 \in J \subset I$ vérifiant de plus $U(x_0) = U_0$.

b) Si, en outre, E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si $F(I \times E) \subset E$ et si $U_0 \in E$, alors $U(x) \in E$ pour tout $x \in J$.

L'attention des candidats est attirée sur le fait que, dans les questions qui suivent, les hypothèses faites entraînent que les fonctions matricielles solutions d'éventuelles équations différentielles sont définies sur I tout entier et que, partant, le point de vue de la maximalité de ces solutions est accessoire.

Partie II - Étude de cas particuliers

II.A - Soit une équation différentielle matricielle polynomiale de la forme $(\mathcal{E})$:

$$M'(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k(x) M^{2k+1}(x).$$

Déduire du théorème $\mathcal{T}$ le résultat $(\mathcal{R})$ suivant : si une solution U sur I de $(\mathcal{E})$ est telle que, pour une valeur $x_0 \in I$, $U(x_0)$ est une matrice antisymétrique, alors $U(x)$ est antisymétrique pour tout $x \in I$. Donner un énoncé plus général concernant une forme analogue d'équation différentielle matricielle, mais de type $(\mathcal{Q})$, pour laquelle le résultat $(\mathcal{R})$ soit conservé.

II.B - Soit une équation différentielle matricielle polynomiale, de la forme

$$M'(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k(x) M^{k}(x).$$

Soit M une solution sur I et $x_0 \in I$ tel que le polynôme caractéristique de $M(x_0)$ soit scindé. On choisit alors $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $T_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure telles que $M(x_0) = P T_0 P^{-1}$.

II.B.1) Former une équation différentielle matricielle polynomiale vérifiée par $T : x \mapsto P^{-1} M(x)\, P$ permettant de montrer que $T(x)$ est triangulaire supérieure pour tout $x \in I$.

II.B.2) On suppose en outre que T_0 est triangulaire stricte. En considérant les fonctions à valeurs réelles $x \mapsto T(x)_{[i,i]}$ avec $1 \le i \le n$, donner une condition nécessaire et suffisante sur la fonction a_0 pour que $T(x)$ soit triangulaire stricte pour tout $x \in I$.

II.B.3) Cette condition étant supposée remplie, on choisit $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $T_0^r = 0$; former une *équation différentielle matricielle de type* $(\mathscr{Q})$ vérifiée par $x \in I \mapsto T^r(x)$ permettant de montrer que l'application T^r est nulle.

II.C -

II.C.1) Soit U solution sur I de l'équation différentielle matricielle

$$M'(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k(x) P_k(x)\, M^k(x)\, Q_k(x) .$$

On suppose qu'il existe $x_0 \in I$ tel que $U(x_0)$ commute avec toutes les matrices $P_k(x)$ et $Q_k(x)$ pour tout $x \in I$. Montrer que $U(x)$ commute avec $U(x_0)$ pour tout $x \in I$.

II.C.2) Soit U une solution sur I d'une *équation différentielle matricielle polynomiale.* Vérifie-t-elle $(P1)$, vérifie-t-elle $(P2)$? Montrer que $\dim(\mathrm{Vect}\{U(x),\ x \in I\})$ est inférieure ou égale à n.

II.D - Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $(M, N) \in E^2 \Rightarrow MN - NM \in E$. En introduisant une équation différentielle matricielle bien choisie, montrer que $\forall (t, M, N) \in I \times E^2$, $\exp(tM) N \exp(-tM) \in E$.

Partie III - Cas des matrices orthogonales

III.A - On s'intéresse à une équation différentielle matricielle de la forme $(\mathscr{E}')$: $M'(x) = a(x)(I_n - M^2(x))$, où a désigne une fonction donnée, de classe C^0 de I dans $\mathbb{R}$.

III.A.1) Si U est une solution sur I de $(\mathscr{E}')$ telle que $(U(x_0))^2 = I_n$ (matrice d'une symétrie) pour un certain $x_0 \in I$, que peut-on dire de la fonction U ?

III.A.2) Soit $J \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'une solution U de $(\mathscr{E}')$ sur I vérifie ${}^tU(x_0) J U(x_0) = J$ pour un $x_0 \in I$. On pose alors $N(x) = {}^tU(x) J U(x)$ pour tout $x \in I$. Former une équation différentielle matricielle de type $(\mathscr{Q})$ vérifiée par $N - J$ et en conclure que $N(x) = J$ pour tout $x \in I$. Si, en outre, J est inversible, montrer que l'application $x \mapsto \det(U(x))$ est constante.

III.B - Dans toute cette section III.B, on choisit $n = 3$. Soit U une matrice élément de $E_3(I)$ à valeurs dans $SO_3(\mathbb{R})$ vérifiant $(P2)$ et telle que,

$$\forall x \in I, \begin{cases} U(x) \neq I_3 \\ -1 \text{ n'est pas valeur propre de } U(x) \end{cases}.$$

III.B.1)

a) Pour $x_0 \in I$ fixé, on pose $U_0 = U(x_0)$. Montrer qu'il existe un vecteur Z_0 unitaire dans $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique, tel que $U_0 Z_0 = Z_0$.

b) On choisit alors X_0 et Y_0 tels que $B = (X_0, Y_0, Z_0)$ soit une base orthonormale directe de $\mathbb{R}^3$, on pose $X = Y_0 + Z_0$ et $C = (X, U_0 X, U_0^2 X)$.

De quelle forme est la matrice dans B de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant U_0 pour matrice dans la base canonique ? Calculer alors $\det_B(C)$ en fonction des coefficients de cette matrice et en déduire que C est une base de $\mathbb{R}^3$.

c) En conclure qu'il existe trois fonctions u, v, w de I dans $\mathbb{R}$ telles que $U'(x) = u(x)I_3 + v(x)U(x) + w(x)U^2(x)$ pour tout $x \in I$. On admettra que ces trois fonctions sont continues.

d) En exprimant la dérivée de ${}^tUU$ en fonction de u, v, w, ${}^tU + U$, montrer que U est solution d'une équation différentielle matricielle, notée $\mathcal{F}$, de la forme $(\mathcal{E}')$: on exprimera, à l'aide de certaines des fonctions u, v, w, la fonction a correspondante.

III.B.2) Transformer l'équation $(\mathcal{F})$ par le changement de matrice inconnue défini par la formule : $(I_3 + U(x))A(x) = I_3 - U(x)$, en justifiant l'introduction de $A(x)$.

Montrer que A est solution sur I d'une équation différentielle matricielle polynomiale très simple. Résoudre cette équation et en déduire une expression de $U(x)$ pour tout $x \in I$.

III.C - En s'inspirant de III.B.1-d), construire une fonction élément de $E_3(\mathbb{R})$ à valeurs dans $SO_3(\mathbb{R})$ vérifiant $(P2)$ mais pas $(P1)$.

III.D - Chercher la solution maximale U dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de l'équation différentielle matricielle $M'(x) = I_2 + M^2(x)$, définie au voisinage de 0 et telle que

$$U(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour cela, on montrera que les solutions sont nécessairement de la forme

$$x \in I \mapsto U(x) = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ b(x) & a(x) \end{pmatrix}$$

et on cherchera ensuite une équation différentielle vérifiée par $u = b^2 - a^2$, sachant que $u(0) = 1$.

••• FIN •••
